

MINESEC	SESSION INTENSIVE N°1	ANNEE SCOLAIRE 2020/2021
INSTITUT ZANG MEBENGA		Tle C ; Durée : 4h. COEF : 7
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES		Ex : BISSONOÏ MEZINDJOU

La présentation, la qualité de la rédaction des solutions seront prises en compte lors de la correction des copies

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

Exercice 1 : (5pts)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) : $5^x - 4^x = y^2$

1- Vérifier que (1,1) est solution de (E)

Dans la suite, on suppose que x est différent de 1

2- L'objet de cette question est de démontrer que x est pair

a) Quels sont les entiers naturels tels que $n^2 \equiv 5 \pmod{8}$?

b) Démontrer que si x est impair, alors $5^x - 4^x \equiv 5 \pmod{8}$

c) Conclure

3- On pose $x = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$)

a) Démontrer que (E) est équivalent à : $(5^m - y)(5^m + y) = 2^{4m}$

b) En déduire qu'il existe deux entiers p et q tels que

$$5^m - y = 2^p \text{ et } 5^m + y = 2^q \text{ avec } p + q = 4m$$

c) Déduire de 3b) que $\begin{cases} p = 1, q = 4m - 1 \\ 5^m = 1 + 4^{2m-1} \end{cases}$

En déduire que $m \leq 1$ (on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde)

4- Déterminer les solutions de (E)

Exercice 2 : (7pts)

A) Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique 2cm. On considère les trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts a, b et c tels que $|a| = |b| = |c|$. On désigne par A, B et C les images respectives de a, b et c dans le plan (P) . On note H le point d'affixe $a + b + c$.

Le but de cette partie est de montrer que H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC

1) a) on considère le nombre complexe $w = \bar{b}c - b\bar{c}$. Exprimer $\bar{w}$ en fonction de w . En déduire que w est un nombre complexe imaginaire pur ou nul

b) montrer à l'aide de a) que $(b + c)(\bar{b} - \bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont des nombres complexes imaginaires purs ou nuls.

2) a) exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$

b) utiliser a) et 1) pour montrer que la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A .

c) expliquer sans calcul supplémentaire pourquoi H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC

3) placer les points A, B, C et H dans le plan (P) en prenant $a = \sqrt{3} + i$;

$$b = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } c = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

B) on considère dans l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, l'équation $(E_n): x^2 - 48x - 2^{n-2} = 0$ où n est un nombre entier naturel et x un nombre inconnu. On rappelle qu'un nombre réel a est un carré parfait s'il existe un nombre réel b tel que $a = b^2$ et que si p est un nombre premier, alors tout diviseur positif de p^n s'écrit sous la forme p^m avec $0 \leq m \leq n$.

1) Démontrer que si $2^n + 48^2$ est un carré parfait, alors (E_n) admet deux solutions dans $\mathbb{Q}$

2) Soit k un entier naturel tel que $2^n + 48^2 = k^2$.

34530

01539/9

- a) Démontrer qu'il existe deux entiers naturels p et q tel que $k + 48 = 2^p, k - 48 = 2^q$, avec $p + q = n$ 1pt
- b) En déduire que $96 = 2^q(2^{p-q} - 1)$ 0,5pt
- c) Décomposer 96 en produit de facteurs premiers et en déduire p, q et n 1pt
- d) Résoudre (E_n) pour la valeur de n ainsi trouvée 0,5pt

Exercice 3 (3,5pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(2, 0, 1); (3, -2, 0); (2, 8, -4)$

- 1- Soit M le point de coordonnées (x, y, z) Exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$ (0,5pt)
- 2- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$ (0,5pt)
- 3- Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées du point N (0,5pt)
- 4- On rappelle que le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.
- a) Le point N étant défini à la question précédente, Montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$ puis calculer son volume. (1pt)
- b) En utilisant les résultats du 1), et en prenant $M = C$, calculer l'aire du triangle ABC (0,5pt)
- c) En déduire la distance du point N au plan (ABC) (0,5pt)

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5pts)

A la veille des élections municipales, un maire sortant, pour s'attirer les suffrages des électeurs, décide de rembourser une partie n (en francs) des impôts locaux de l'année précédente. Il calcule que s'il répartit équitablement cette somme entre les 5544 contribuables de sa ville, il restera 219 francs dans les caisses, tandis que s'il la répartit entre les 2730 contribuables les plus pauvres, il restera 345 francs. Outre l'aspect purement politique, ce qui finalement emporte sa décision c'est que seule la deuxième solution permet de franchir le seuil psychologique des 100 francs remboursés à chacun. Monsieur le Maire décide aussi de construire un secrétariat de forme intérieur rectangulaire de $(2n + 3)(n^2 + 1)$ cm de longueur et $n(2n + 3)$ cm de largeur où n est un entier naturel inférieur à 10. Il souhaite recouvrir le sol avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible. Enfin, Monsieur le Maire décide d'accorder une subvention annuelle de 4000 francs CFA à une association des jeunes de sa commune (les pointillés sont occupés par des 0).

- 1) Déterminer la somme à partager. 1,5pt
- 2) Déterminer les dimensions de l'intérieur du secrétariat si on utilise des carreaux de 289cm^2 chacun. 1,5pt
- 3) Déterminer le montant de la subvention sachant qu'il a exactement 143 diviseurs positifs 1,5pt