

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**Partie A : Evaluation des ressources/17pts****Exercice 1/6pts**

1. Démontrer par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$ 1pt

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$ 1pt

2. Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. 1pt3. a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 2^n par 5. 1ptb) En déduire les restes de la division euclidienne de 2^{243} et 1357^{2019} par 5. 1pt4. Déterminer les entiers naturels n tels que 4 divise $n^3 + 2n + 1$. 1pt**Exercice 2/4,5pts**I- Soient $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$ et $z_0 \neq 0$.1. Montrer que si z_0 est une racine de $P(z)$ alors $\overline{z_0}$ l'est aussi. 0.5pt2. Montrer que si z_0 est une racine de $P(z)$ alors $\frac{1}{z_0}$ l'est aussi. 1pt3. Calculer $P(1+i)$ et en déduire les autres racines de $P(z)$. 1ptII- Soient A, B et M trois points d'affixes $1-i$, 1 et z . Pour $z \neq 1$, on pose $Z = \frac{z-1+i}{z-1}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) Z soit réel. 1ptb) Z soit imaginaire pur. 1pt**Exercice 3/6,5pts**On note $0, 1, 2, \dots, 9, \alpha, \beta$ les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.1. Soit N_1 le nombre dont l'écriture en base 12 est $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.Déterminer l'écriture de N_1 en base 10. 0.5pt2. Soit $N_2 = 1131$ en base 10. Déterminer l'écriture de N_2 en base 12. 0.5pt3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 12 est : $N = \overline{abcd}^{12}$.a) Démontrer que $N \equiv d[3]$. En déduire une condition de divisibilité de N par 3. 1.5ptb) Démontrer que $N \equiv a + b + c + d[11]$. En déduire une condition de divisibilité de N par 11. 1.5pt4. N_1 et N_2 sont-ils divisible par 11 ? Justifier. 1pt

5. Soit $M = \overline{x40y}^{12}$. Déterminer x et y pour que M soit divisible par 3 et par 11.

1,5pts

Partie B : Evaluation des compétences/3pts

Monsieur Fokou a oublié le code à 4 chiffres de son coffre- fort. Heureusement, il se souvient que le code ne contient pas de zéro, que les chiffres sont tous différents et qu' à partir de la gauche :

- Le premier chiffre est pair supérieur à 5 ;
- le nombre formé par le premier et le deuxième chiffres est multiple de 3 ;
- le nombre formé par le troisième et le quatrième chiffres est multiple de 5 ;
- le code est un multiple de 9.

Au même moment, son ami a oublié le mot de passe de son téléphone. Mais il se souvient que son mot de passe est sous la forme $x43y$ et que son mot de passe est divisible par 2 et par 9.

Tâche 1 : Déterminer le code de monsieur Fokou.

1,5pt

Tâche 2 : Déterminer le mot de passe du téléphone de l'ami de monsieur Fokou.

1,5pt