TRAVAUX DIRIGES POUR LES CONGES

Thème 1 : Equations, inéquations et systèmes.

A. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2 - x + 2} - 2x + 1 = -x - 2$ **2.** $\sqrt{2 - x} > 3x - 2$ **3.** $\sqrt{(2 - x)(x + 4)} > -1$

B. Votre père place la somme de 120 000 frs dans une banque pendant un an à un taux d'intérêts de x%. A la fin de l'année, il retire son capital et les intérêts produits pour les placer dans une autre banque qui produit y% d'intérêt par an. Il obtient dans cette nouvelle banque un intérêt de 9450 frs. Sachant que y = x + 1,5. Déterminer x.

C. Soit (E) l'équation $(m + 1)x^2 - (m + 3)x + 3 - m = 0$

Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions de (E).

D. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} \frac{1}{x^2-8} - |y| + 3\sqrt{z} = 0 \\ \frac{4}{x^2-8} - 2|y| + 3\sqrt{z} = -4 \\ \frac{49}{x^2-8} - 7|y| + 3\sqrt{z} = 6 \end{cases}$

E. Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^4 - 4x^3 - 58x^2 - 4x + 1$

1. a. Vérifier que 0 n'est pas racine de P.

b. Montrer que si **a** est racine de P alors il en est de même pour $\boldsymbol{\frac{1}{a}}$

2. a. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ est équivalente à $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0$ où d est un réel à déterminer.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

Thème 2 : Barycentres et lignes de niveaux

A. ABC est un triangle. Les points P et Q sont tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

1. Construire les points P et Q.

2. Placer les points R et S tels que $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

a. Montrer que les droites (PR) et (BS) sont parallèles.

b. Montrer que les points A, R et S sont alignés.

B. ABCD est un parallélogramme.

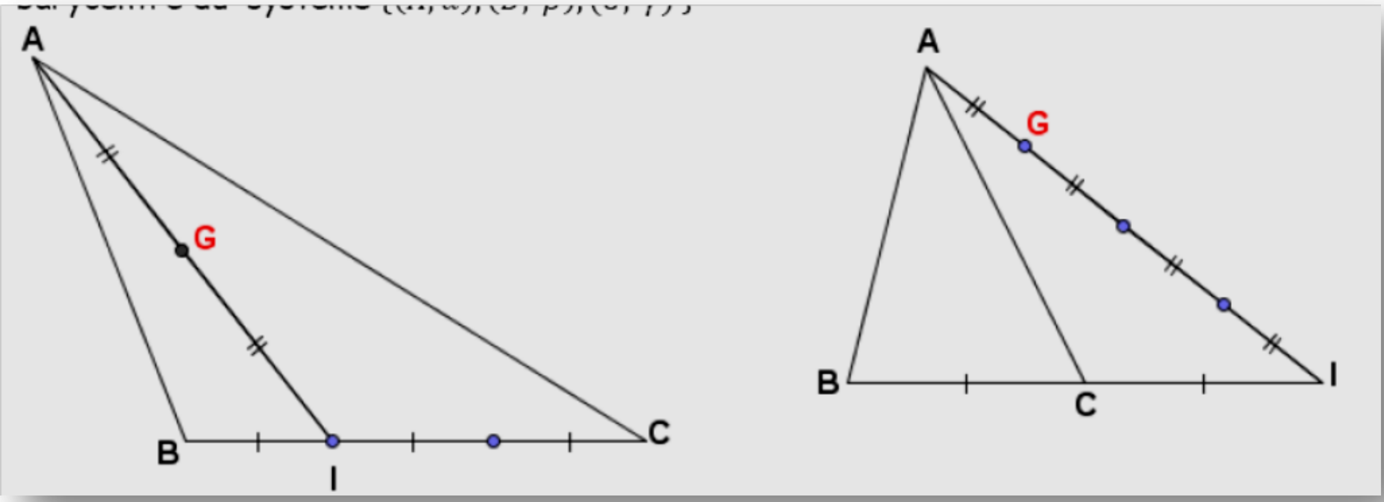
1. Ecrire D comme barycentre des points A, B et C.

2. On définit les points I, Q et R par $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, I est le milieu de [BC] et R est le symétrique de I par rapport à B. Démontrer que D, R et Q sont alignés.

C. ABC est un triangle. K est le milieu de [BC], I et J sont des points tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JA} = \vec{0}$. Justifier que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

D. Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 6$ cm. Déterminer l'ensemble des points M tels que : **1.** $MA^2 + MB^2 = 36$ **2.** $MA^2 - MB^2 = -3$ **3.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -3$

E. Dans chacun des cas suivants, écrire G comme barycentre des points A, B et C affectés des coefficients à déterminer.



E. A et B sont deux points du plan tels que AB = 4cm. Les points C, D et G sont tels que AC = 3cm, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$. $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = 3\,\overrightarrow{AC}$.

1. Vérifier que la mesure de $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ puis construire les points C, D et G.
2. Calculer $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BG}$
3. **a.** Ecrire G comme barycentre des points A et C affectés des coefficients à préciser.
   b. Montrer que pour tout point M du plan, $-2MA^2 + 3MC^2 = MG^2 - 54$
   c. (C) désigne l'ensemble des points M du plan tels que $-2MA^2 + 3MC^2 = -18$.
   Vérifier que le point C ∈ (C), puis construire (C).

Thème 3 : Géométrie plane

A. On considère dans un repère (O, I, J) les points A(4, 1), B(3, 5) et C(–1, 4).

1. Démontrer que OABC est un carré et calculer son aire.

2. Démontrer qu'une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit à OABC est :

$x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$

3. Donner une équation de la tangente à (C) au point A.

4. Soit (D_m) la droite de coefficient directeur m passant par l'origine. Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m, les positions relatives entre (D_m) et (C).

B. Soit (C_1) le cercle de centre Ω_1 et de rayon r_1 et (C_2) le cercle de centre Ω_2 et de rayon r_2. Les cercles (C_1) et (C_2) sont dits sécants lorsque $|r_1 - r_2| < \Omega_1\Omega_2 < r_1 + r_2$

On suppose donc, (C_1) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$ et le cercle (C_2) de centre $\Omega_2(3, 3)$ et de rayon $r_2 = 5$.

1. Déterminer les coordonnées du centre Ω_1 et du rayon r_1 du cercle (C_1).

2. Donner une équation cartésienne de (C_2).

3. Montrer que (C_1) et (C_2) sont sécants.

4. Soit A et B les points d'intersection entre (C_1) et (C_2). A ayant une abscisse nulle. Déterminer les coordonnées de A et B.

5. Donner une équation de la tangente (T_1) à (C_1) au point A et une équation de la tangente (T_2) à (C_2) au point A. Montrer que (T_1) et (T_2) sont perpendiculaires.

Thème 4 : TRIGONOMETRIE

A. 1. Placer les points $M\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$, $N\left(\frac{28\pi}{6}\right)$ et $P\left(\frac{193\pi}{4}\right)$ sur le cercle trigonométrique

2. Déterminer les mesures des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON}})$ où O est le centre du cercle trigonométrique.

B. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases}\sqrt{3}cosx - siny = 2\\ cosx + \sqrt{3}siny = 0\end{cases}$

C. Montrer que $cos\frac{\pi}{12}\times cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$ (On pourra utiliser $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2cosacosb$)

D. Soit $A(x) = 1 + 2cosxsinx - 2\cos^2 x$

1. Montrer que $A(x) = -\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

2. Résoudre dans $[-\pi,\ \pi]$ l'équation $A(x) = 1$ puis placer les points images solutions sur le cercle trigonométrique.

3. Déduire la solution dans $[-\pi,\ \pi]$ de l'inéquation $cosxsinx \geq \cos^2 x$

E. 1. Montrer que $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ (On pourra développer $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$)

2. Résoudre dans $[0,\ 2\pi]$ l'équation $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$

F. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $BC = 2$. On pose $\alpha = mes\widehat{ABC}$

1. Calculer AB, $cos\alpha$ et $cos2\alpha$

2. En déduire la valeur en radians de α.

G. 1. Démontrer que lorsque $tan2x$ et $tanx$ existe, $tan2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

2. Déduire que $tan\frac{\pi}{8}$ est solution de l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$ et donner sa valeur exacte.

Thème 5 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

A. Etudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f : x \to x + \frac{1}{x}$ **2.** $f : x \to x^2 + \frac{1}{x}$ **3.** $f : x \to \frac{x}{1+|x|}$ **4.** $f : x \to \frac{x^2}{|x|-1}$ **5.** $f : x \to \frac{sinx}{2-cosx}$

B. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \frac{2x+1}{2x-5}$ et $g(x) = 2 + cosx$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2cosx - 1 = 0$

2. Déterminer D_{fog} puis donner la forme explicite pour fog.

C. Soit $f(x) = \frac{-2x^2+3x-1}{x}$ et $g(x) = -2x + 3$ de courbes respectives (C_f) et (C_g).

Etudier les positions relatives entre (C_f) et (C_g).

D. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. Donner la forme canonique de f.

2. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est centre de symétrie pour la courbe de f

3. Démontrer que pour tout $x \in [2,\ 5]$, $-1 \leq f(x) \leq 8$ Que peut-on en déduire ?

4. Construire la courbe de la fonction $k : x \to x^2$ dans l'intervalle [-3, 3].

5. Déduire une transformation permettant d'obtenir la courbe de f à partir de celle de k puis la construire dans le même repère.

6. Soit $l : x \to |f(x)|$ Construire la courbe de l.

E. Montrer que le point Ω est centre de symétrie pour la fonction f :

1. $f : x \to \frac{2x-3}{x+1}$ $\Omega(-1,\ 2)$ **2.** $f : x \to \frac{x^2-4x+7}{x-2}$ $\Omega(2,\ 0)$

Thème 5 : LIMITES ET CONTINUITE

A. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{2-\sqrt{4+x}}$ **b.** $\lim_{x\to 4}\frac{x+\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-2}$ **c.** $\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx+\sin 3x}{3x}$ **d.** $\lim_{x\to+\infty}(x+1-\sqrt{x^2-2x-1})$

e. $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\sqrt{x+1}}{x}$

B. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x\cos x}{x^2+1}$

Montrer que pour tout $x > 0$, $-\frac{x}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{x}{x^2+1}$ puis déduire la limite de f en $+\infty$.

C. Soit $f(x) = \frac{2-\sqrt{x+6}}{x+2}$ Déterminer D_f puis montrer que f admet un prolongement par continuité en -2 que l'on définira.

Thème 6 : DERIVEES et ETUDE DE FONCTIONS

A. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^3(1+\sqrt{x})$ **b.** $f(x) = \frac{4x^2+5x+2}{x+1}$ **c.** $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ **d.** $f(x) = (3x^2-5x+1)^5$

e. $f(x) = \sqrt{-8x^2+6x-5}$ **f.** $f(x) = (x-2)^2(3-x^2)^3$

B. Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ x^2-x+1 & si\ x > 0 \end{cases}$ (C_f) désigne sa courbe représentative dans un repère.

1. Donner le domaine de définition de f

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

3. Pour tout $x \in]-\infty, 0[$ et $x \in]0, +\infty[$ Calculer $f'(x)$ et donner le sens de variation de f

4. Dresser le tableau de variation de f

5. Montrer que (C_f) admet une asymptote en $-\infty$ dont on donnera une équation.

6. Construire soigneusement la courbe de f

C. Le tableau suivant est celui d'une fonction f de courbe **(C).**

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

1. Par lecture du tableau ci-dessus, déterminer :

a) l'ensemble de définition D_f de f.

b) les limites de f aux bornes du domaine D_f

c) $f(-1)$, $f(1)$ et $f'(1)$

d) l'ensemble solution des inéquations : **i)** $f'(x) \geq 0$ **ii)** $f(x) > 0$

2. Une équation de l'asymptote verticale à **(C).** Justifier votre réponse.

3. On suppose que pour tout réel x non nul, $f(x) = x + a + \frac{b}{x}$

Déterminer les valeurs des réels **a** et **b**.

D. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction $f : x \to \frac{ax^2+bx+c}{x+2}$ admette pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x - 1$ et au point d'abscisse -1, une tangente parallèle à (OI).

E. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-1}$ On désigne par (C_f) la représentation graphique de f.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2. a) Déterminer la fonction dérivée f' de f, en déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Vérifier que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = x + 2 - \frac{4}{x-1}$ et en déduire que la droite $(D) : y = x + 2$ est asymptote à (C_f).

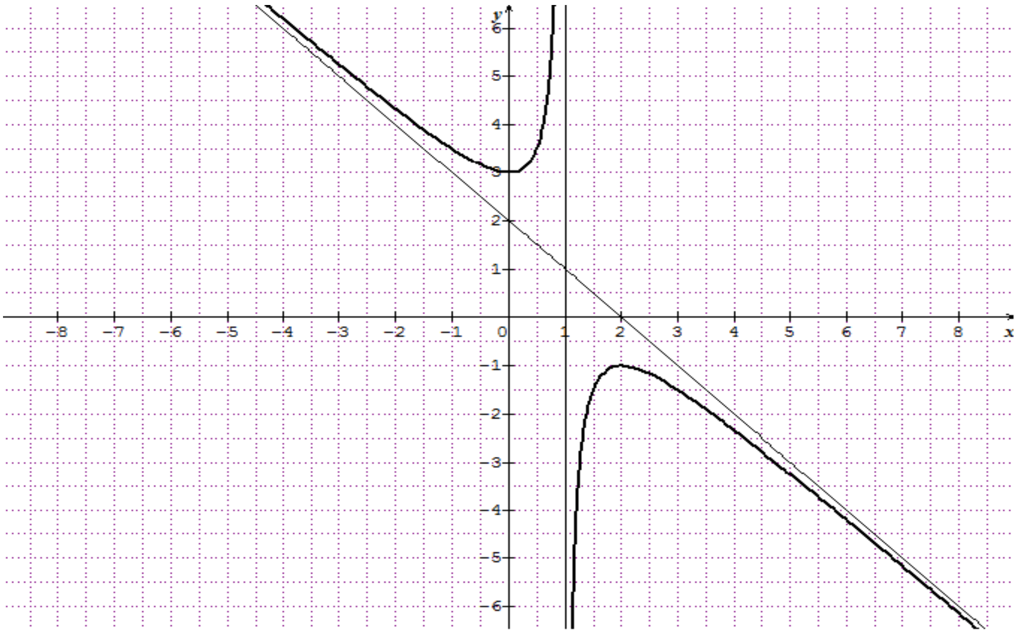
b) Etudier la position relative de (C_f) et (D).

4. a) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

b) Construire la courbe (C_f).

5. Démontrer que le point $\Omega(1, 3)$ est centre de symétrie de (C_f).

F.



1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ y - z = 3 \\ x - z = 0 \end{cases}$

2) Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f dont le graphe est donné ci-dessus et f est telle que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ où a, b et c sont des constantes réelles.

a) Donner sous forme d'intervalles le domaine de définition D de f

b) Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

i) les limites de la fonction f aux bornes de D

ii) $f(0)$, $f(2)$ et $f'(0)$ où f' désigne la dérivée première de la fonction f

iii) les coordonnées du point Ω centre de symétrie à la courbe (C_f)

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Calculer $f'(x)$ en fonction de a, c et x

e) Déduire en utilisant les questions précédentes les réels a, b et c

Donner une équation de chacune des asymptotes à (C_f)

« Quand tu as envie d'abandonner, pense à la raison qui t'a fait commencer »