TRAVAUX DIRIGES N°3

EXERCICE 1

Simplifier chacune des expressions ci-dessous :

$$A = \cos\left(\frac{19\pi}{2} + x\right) - \sin\left(-\frac{21\pi}{2} - x\right) + \sin(53\pi - x) - \cos\left(x - \frac{101\pi}{2}\right)$$

$$B = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right); \quad C = \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$D = \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{9}; \quad E = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}$$

EXERCICE 2

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donner les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cos x + \sqrt{2+\sqrt{3}}\sin x = -\sqrt{2}$.

3. Représenter les points images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.

4. Déduire sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'ensemble solution de l'inéquation (I) :

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\cos x + \sqrt{2+\sqrt{3}}\sin x + \sqrt{2} < 0.$$

EXERCICE 3

1. Montrer que $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$.

2. Soit θ un réel de $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ tel que $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

a) Démontrer que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

b) Calculer $\cos 2\theta$ et en déduire la valeur exacte de θ.

3. On considère sur $]-\pi;\pi]$ l'équation (E) : $(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cos 2x + (\sqrt{2}-\sqrt{6})\sin 2x = -2$.

a) Déterminer deux réels r et φ tels que

$$(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cos 2x + (\sqrt{2}-\sqrt{6})\sin 2x = r\sin(2x+\varphi).$$

b) Résoudre l'équation (E).

c) Déduire sur $]-\pi;\pi]$ l'ensemble solution de l'inéquation (I) :

$$(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cos 2x + (\sqrt{2}-\sqrt{6})\sin 2x < 0.$$

EXERCICE 4

Soit α un réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E_α): $2x^2-2x\sqrt{2}(\cos\alpha)+\cos 2\alpha=0$.

1. Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta=8\sin^2 x$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_α).

3. Mettre les expressions $\cos\alpha+\sin\alpha$ et $\cos\alpha-\sin\alpha$ sous la forme $r\cos(x+\theta)$ où r et θ sont des réels à déterminer.

4. Déterminer les valeurs possibles de α pour que $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ soient solutions de (E_α).

EXERCICE 5

1. a et b sont des réels de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $\sin a=\frac{1}{2}$ et $\sin b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

a) Calculer $\cos a$, puis montrer que $\cos b=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

b) Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. En déduire les valeurs exactes de $a+b$ et b.

2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=\sin 8x$.

b) Montrer que $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$.

c) Déduire que $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$.

EXERCICE 6

1. Soit (E) l'équation $4x^2+2(\sqrt{2}-5)x-5\sqrt{2}=0$.

a) Montrer que (E) admet deux solutions de signes contraires

b) Montrer que $\frac{5}{2}$ est une solution de (E), puis déduire sans résolution l'autre solution.

2. On considère sur $]-\pi;\pi]$ l'équation (E'): $2\cos 4x+2(\sqrt{2}-5)\cos 2x+2-5\sqrt{2}=0$.

a) En posant $X=\cos 2x$, montrer que (E) et (E') sont équivalentes.

b) Résoudre (E'), puis placer ses solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 7

1. Montrer que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E): $\sin 2x=\cos x+\sin x-\frac{1}{2}$.

3. Montrer que (E) est équivalente à $(E'): 2\cos^2 X - \sqrt{2}\cos X - \frac{1}{2} = 0$ avec $X = x - \dfrac{\pi}{4}$.

4. Résoudre (E') dans $\mathbb{R}$, puis déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E).

EXERCICE 8

On considère l'équation (E): $\sin 3x = -\sin 2x$

1. Résoudre (E) sur $[-\pi;\pi]$ et placer ses solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Démontrer que $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$.

3. En déduire que (E) est équivalente à (E'): $\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4t^2 + 2t - 1 = 0$.

5. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et de $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 9

1. Soit P le polynôme défini par $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.

Montrer que $P(x)$ est divisible par $x - 1$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. On considère l'équation (E): $\cos 2x = \sin 3x$.

a) Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

b) Montrer que $\dfrac{\pi}{10}$ est solution de l'équation (E).

c) Déduire de ce qui précède que $\sin\dfrac{\pi}{10}$ est solution de l'équation $4t^2 + 2t - 1 = 0$.

d) Déduire la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{10}$.

3. Soit x un réel non nul et différent de $\dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que : $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = 4\cos 2x$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = \sqrt{5} - 1$.

EXERCICE 10

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $3\cos^2 2x - \sin^2 2x + 1 = 0$.

a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $\cos 4x + 1 = 0$.

b) Résoudre (E) sur $[0;\pi]$, et placer les solutions sur un cercle trigonométrique.

c) Déduire sur $[0;\pi]$ les solutions de l'inéquation $3\cos^2 2x - \sin^2 2x \geq -1$.

2. Soit α un réel de $[0;\pi]$. ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que $BC = 4a\sqrt{2}$; $a \in \mathbb{R}_+^*$. On nomme G_α le barycentre des points pondérés $(A, 3\cos^2 2x)$; $(B, -\sin^2 2x)$ et $(C, 1)$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles G_α n'existe pas.

b) On suppose dans la suite que $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ et on note G le barycentre pour cette valeur de α.

✓ Construire le point G, puis calculer GA^2, GB^2 et GC^2.

✓ On nomme (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$3MA^2 + 3\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

- Discuter suivant les valeurs de k, la nature de (Γ).
- Déterminer k pour que $A \in (\Gamma)$, puis construire (Γ).

EXERCICE 11

1. Démontrer que $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2. Déduire les valeurs exactes de $\sin\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{3\pi}{8}$.

3. Développer $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$, puis déduire $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$. Déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

4. Soit (E) l'équation : $4x^2 + 2\left(3+\sqrt{3}\right)x + 3\sqrt{3} = 0$.

a) Montrer que (E) admet deux solutions toutes négatives.

b) Vérifier que $-\dfrac{3}{2}$ est une solution de (E), puis déduire sans résolution l'autre solution.

5. On considère sur $[-\pi;\pi]$ l'équation (E'):

$$\left[\cos x - \left(\sqrt{2}-1\right)\sin x\right]\left[2\cos 2x + 2\left(3+\sqrt{3}\right)\cos x + 2 + 3\sqrt{3}\right] = 0.$$

a) Résoudre (E') et placer ses solutions sur un cercle trigonométrique.

b) Déduire sur $[-\pi;\pi]$ les solutions de l'inéquation (I) :

$$\left[\cos x - \left(\sqrt{2}-1\right)\sin x\right]\left[2\cos 2x + 2\left(3+\sqrt{3}\right)\cos x + 2 + 3\sqrt{3}\right] > 0.$$

EXERCICE 12

Soit x un nombre réel.

On pose $A = \cos^4 x + \cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x+\dfrac{2\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

1. Montrer que : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

2. Déduire que : $\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)=1-\frac{1}{2}\cos^2 2x$.

3. Montrer que $A=\frac{3}{2}$.

4. Soit l'équation (E) : $A=\frac{3}{2}(\cos 2x+\sin 2x)$

a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

b) Résoudre (E) et placer ses solutions sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 13

1. Montrer que $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. On considère l'équation (E): $4\sin^2 x+2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sin x-\sqrt{6}=0$.

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0;2\pi]$.

b) Placer les points du cercle trigonométrique, images des solutions de l'équation (E). **(Unité : $3cm$)**

c) Quelle est la nature du polygone obtenu ?

d) Calculer les valeurs exactes du périmètre et de l'aire de ce polygone.

EXERCICE 14

Soit α un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1. Calculer $\sin\alpha$.

2. Déterminer $\cos 2\alpha$ et en déduire la valeur exacte de α.

3. a) Vérifier que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

c) Déduire la résolution dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation (E) :

$2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

EXERCICE 15

1. Soit (E) l'équation : $\cos 3x-\cos 2x=0$.

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

b) On pose $\cos x=y$. Former une équation en y vérifiant (E).
Vérifier que 1 est solution de cette équation, puis déduire les autres solutions de cette équation.

c) Utiliser les résultats précédents pour donner les valeurs exactes de

$\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, puis déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et de $\cos\frac{3\pi}{5}$

d) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $4\cos 2x + 1 - \sqrt{5} = 0$.

2. Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $BC = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{2\pi}{5}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D.

a) Faire une figure.

b) Démontrer que $AD = BD = a$.

c) Démontrer que $AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$. En déduire que $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

d) On nomme H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Calculer BH en fonction de a de deux manières différentes et déduire que $\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

e) En remarquant que $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$, calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$. Déduire $\sin\frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 16

1. Calculer $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

2. Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'équation $4(\cos^2 x - 1) - 2\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x + \sqrt{3} = 0$.

3. Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

4. Montrer que $\sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

5. Résoudre sur $]-\pi;\pi]^2$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x + \cos y = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

EXERCICE 17

1. Exprimer $\cos 2\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$, puis en fonction de $\sin\alpha$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{8}$ et de $\sin\frac{5\pi}{8}$.

4. Déterminer la valeur exacte du nombre réel $A = \cos\frac{9\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} + 2\cos\frac{5\pi}{8}$