LYCEE DE MAKENENE | **ANNÉE SCOLAIRE 2019-2020**

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | **PD DURÉE : 3HEURES**

EXAMINATEUR : MME KAM | **COEF : 4**

Épreuve de Mathématiques (évaluation numéro 3)

PARTIE A : Evaluation des ressources (15,5$points$)

EXERCICE 1 : (8$points$)

I) On considère l'équation $(E) : 8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$

1. Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une solution de (E) **0,25 pt**

2. Trouver toutes les solutions de (E) **1,5pt**

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $8\cos^3 x - 4\sqrt{3}\cos^2 x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$ **1,5pt**

b. Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de (E). **0,75pt**

II) On considère l'équation (E') tel que $\cos x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

1)a. Exprimer $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$ et en déduire que l'équation (E') peut s'écrire sous la forme de $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **0,75pt**

b. Déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E), puis celle de l'inéquation $\cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$. **1pt**

2) On rappelle que $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

a. Montrer que $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ **0,75pt**

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{3}x^2 + 6x - \sqrt{3} = 0$ **0,75pt**

c. Déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{12}$. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (4$points$)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$. Soit $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative et $\mathscr{H}$ celle de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{7}{x}$.

1)a. Déterminer 2 réels a et b tels que : pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $g(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$. **1pt**

b. Montrer que $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $\mathscr{H}$ par une transformation du plan que l'on précisera. **0,5pt**

2) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, montrer que le point $A(2,3)$ est centre de symétrie pour $(\mathscr{C}_g)$.. **1pt**

3) Q et R sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $Q(x) = \sqrt{4-x}$ et $R(x) = -x^2 + 2x + 4$

a. Déterminer D_Q et D_R.. **0,5pt**

b. Déterminer $(QoR)(x)$ et $(RoQ)(x)$. **1pt**

EXERCICE 3 : (3,5$points$)

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On prendra $1cm$ pour graduation sur les axes.

1) Soit A un point du plan. On note G le milieu du segment $[AO]$;

a. Montrer que pour tout point M du plan, $OM^2 + AM^2 = 2GM^2 + \dfrac{1}{2}OA^2$. . **0,75pt**

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que $OM^2 + AM^2 = OA^2$. **0,75pt**

2) Soit (Γ_2) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

a. Montrer que (Γ_2) est un cercle dont on précisera le centre G et le rayon r. **0,75pt**

b. Vérifier que le point $A(2,4)$ appartient à (Γ_2) et donner une équation de la tangente (T) à (Γ_2) en ce point. **0,75pt**

c. Tracer (Γ_2) et (T). **0,5pt**

PARTIE B : Evaluation des compétences $(4,5 points)$

M. PITOU est un cultivateur qui a une grande plantation de cacaoyers. Il veut faire construire un magasin où ses employés pourront garder du matériel. Pour cela un ingénieur lui propose d'aménager un espace sur l'ensemble des points M vérifiant : $MA^2 + MB^2 \leq 500$; A et B étant deux points situés aux deux extrémités de sa plantation ; $AB = 30$

Pour cela il décide de transporter du matériel nécessaire pour ce travail dans son pousse pousse. Et doit réparer les rayons de roues de son pousse pousse, dans le but d'éviter les pertes des rayons en cas de surcharge.

Un premier mécanicien lui conseille de placer les rayons de roues de son pousse pousse tels que le sinus et le cosinus de l'angle entre deux rayons consécutifs respectent la formule $\cos 2a + \sqrt{3}\sin 2a = \sqrt{3}$.

Un Deuxième mécanicien tel que $\sqrt{3}\sin a + 3\cos a = 3$ Dans les deux options a doit être dans l'intervalle $]\frac{\pi}{36}; \frac{\pi}{18}[$ pour éviter les pertes de rayons. Mr Pitou est embarrassé et t'appelle à l'aide.

Tâche 1 : Détermine les valeurs possibles de a pour le premier mécanicien et dire si les roues de son pousse pousse pourront perdre des rayons en cas de surcharge. **1,5pt**

Tâche 2 : Détermine les valeurs possibles de a pour le deuxième mécanicien et dire si les roues de son pousse pousse pourront perdre des rayons en cas de surcharge. **1,5pt**

Tâche 3 : Détermine l'ensemble des points M où sera construite les magasins. **1,5pt**