Gpm Cluster Pre C

FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS
CLASSE : PREMIÈRE C

► Théorie des graphes.

► Transformation du plan.

► Dénombrement.

► Statistiques

► Orthogonalité dans l'espace.

► Géométrie analytique de l'espace.

► Sphère.

► Matrices et applications linéaires.

► Vecteurs de l'espace.

► Suites numériques.

► Trigonométrie.

Édition : Mai 2020

Travaux Dirigés 1

Introduction à la Théorie des Graphes Durée : 3 h Prof : NGNAZOKE WASSAIN Armand

Objectifs

- ☞ Définir un graphe et son ordre ;
- ☞ Reconnaître un graphe simple, un graphe orienté et un graphe complet ;
- ☞ Déterminer l'ordre et le degré d'un graphe ;
- ☞ Reconnaître deux sommets adjacents ;
- ☞ Résoudre des problèmes concrets de la vie courante à l'aide des graphes.

1 Quelques rappels

Pré-requis

❶ Dessine un cube.

❷ Quel est le nombre de sommets de ce cube ?

❸ Quel est le nombre d'arêtes de ce cube ?

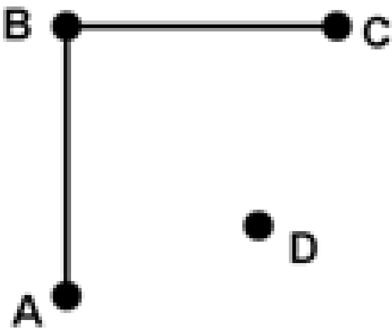
Vocabulaire

- **Un graphe** est un ensemble constitué d'un ensemble $S = \{s_1; s_2; \dots; s_n\}$ de points appelés **sommets ou nœuds** et d'un ensemble $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ d'arêtes qui sont les traits ou des segemnts qui relient ces sommets.
- **Une boucle** correspond à une arête reliant un sommet à lui-même.
- Deux sommets reliés par une même arête sont dits **adjacents (ou voisins).**
- **Un sommet pendant** est un sommet qui n'a qu'un seul voisin.
- **Un sommet isolé** est un sommet qui n'est relié à aucun autre.
- Des arêtes qui relient les mêmes sommets sont dites **multiples ou parallèles** et sont généralement notées à l'aide de nombres mis entre parenthèses.

Propriété 1

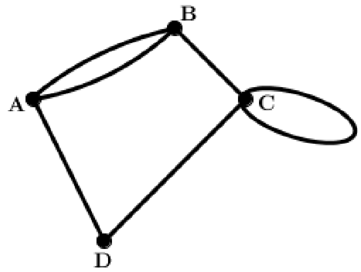
- L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets ;
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet ;
- Le degré d'un graphe est le degré de son sommet de degré maximal.

Exemple 1



— Ce graphe est de degré 2, car le degré de son sommet de degré maximal est 2.
— Ce graphe est d'ordre 4, car il a 4 sommets qui sont : A, B, C, D
— Le degré du sommet A est 1 car il y'a une seule arête dont il est une extrémité ;
— Le degré du sommet B est 2 ; le degré du sommet D est 0.
— Les sommets A et B sont adjacents, car ils sont reliés par une même arête ;
— Le sommet D est isolé, car il n'est relié à aucun autre sommet ; les sommets A et C sont pendants.

Exemple 2



— Il y'a une arête qui relie le sommet C à lui-même. Donc c'est une boucle.
— Les sommets A et B sont reliés par deux arêtes. Ces arêtes sont dites multiples ou parallèles.

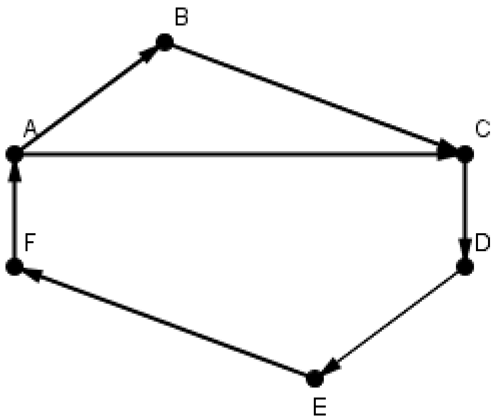
Propriété 2

- Un graphe est **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.
- Un graphe est dit **complet** si tous ses sommets sont adjacents ;
- Un graphe est dit **discret** si chacun de ses sommets n'est lié à aucun autre sommet ;
- Un graphe est dit **orienté** si un sens est attribué à chacun de ses arêtes à l'aide d'une flèche ;

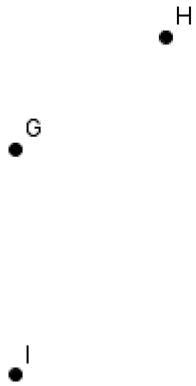
  Dans un graphe orienté, un **circuit** est un chemin qui commence par un sommet et se termine au même sommet ;
- Un graphe est dit **connexe** s'il est possible à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes.

Exemple 3

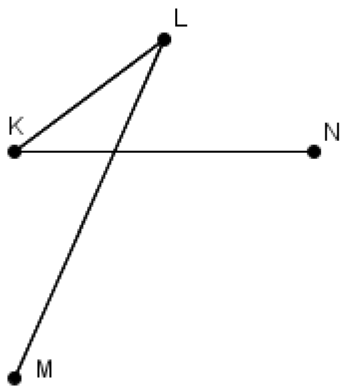
Le graphe de l'exemple 1 est simple.



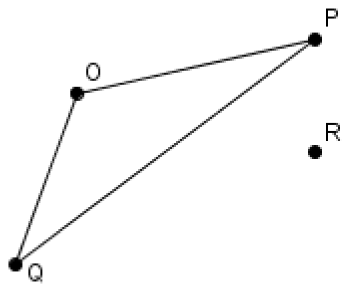
Graphe orienté d'ordre 6



Graphe discret



Graphe connexe (chaque sommet est relié directement ou indirectement à l'autre)



Ce graphe est non connexe car les sommets Q et R ne sont pas liés

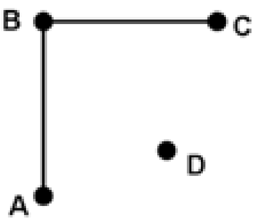
Remarque

- La position des sommets et la longueur des arêtes n'a pas d'importance.
- Dans la recherche du degré d'un sommet, une boucle est comptée deux fois.

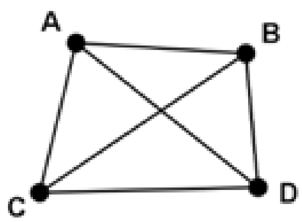
Propriété 3 : (Lemme des poignées de mains)

Dans un graphe, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

Exemple



graphe 1



graphe 2

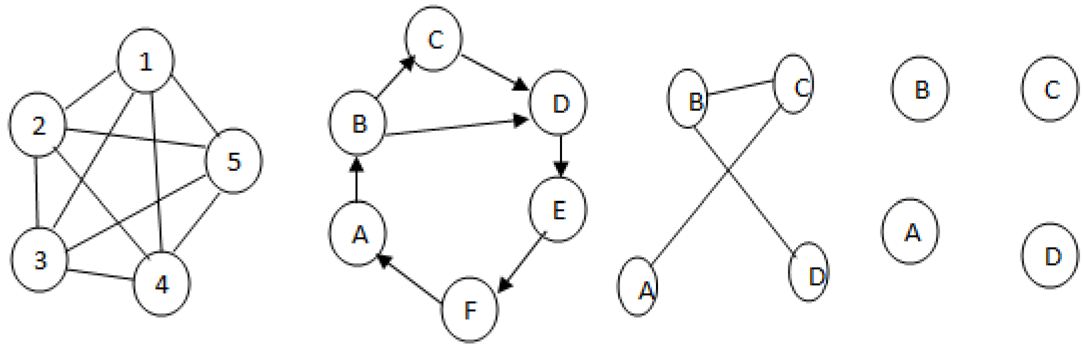
	Dégré de A	Dégré de B	Dégré de C	Dégré de D	Somme des dégrés	Nombre d'arêtes
Graphe 1	1	2	1	0	4	2
Graphe 2	3	3	3	3	12	6

2 Exercices

EXERCICE 1

❶ Définir les mots et expressions suivantes : **graphe, ordre d'un graphe, graphe simple, degré d'un graphe**

❷ Parmi les représentations ci-dessous, identifier **le graphe connexe, le graphe complet, le graphe discret et le graphe orienté.**



(a) (b) (c) (d)

EXERCICE 2

En une semaine, tu fais les trajets suivants : Maison-Lycée ; Maison-Boulangerie ; Maison-Stade ; Lycée-Hôpital ; Maison-Hôpital.

❶ Construis un schéma modélisant tous les trajets que tu peux effectuer pendant la semaine.

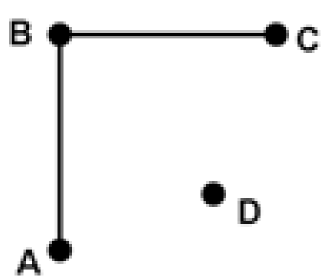
❷ Combien de routes relient la maison aux autres destinations ?

❸ Détermine le nombre de trajets.

❹ Cite les endroits qui ne sont pas reliés ?

EXERCICE 3

On considère le graphe ci-dessous :



Déterminer en justifiant votre réponse

❶ L'ordre de ce graphe.

❷ Le degré du sommet A.

❸ Le degré du sommet B.

❹ Deux sommets adjacents.

❺ Un sommet isolé.

EXERCICE 4

Dessine un graphe dont les sommets sont représentés par les chiffres 2 à 9. Relie deux sommets du graphe lorsque l'un est multiple de l'autre.

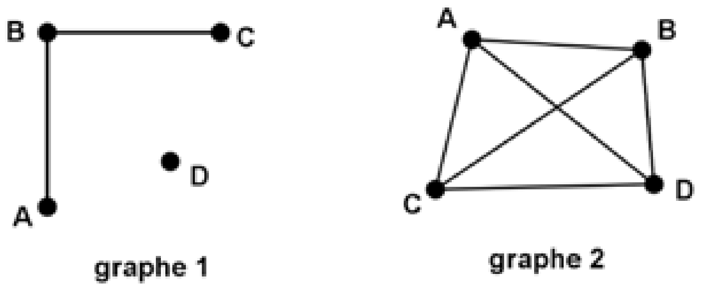
❶ Quel est l'ordre du graphe ? Quels sont les sommets isolés ? Quels sont les sommets pendants ?

❷ Cite deux sommets adjacents. Nomme un sommet de degré 3.

EXERCICE 5

❶ Enoncer le **lemme des poignées de mains.**

❷ Compléter le tableau ci-dessous.



	Dégré de A	Dégré de B	Dégré de C	Dégré de D	Somme des dégrés	Nombre d'arêtes
Graphe 1						
Graphe 2						

EXERCICE 6

Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relier avec exactement trois autres ?

Indication : Vérifier si le lemme des poignées des mains est applicable (le degré de chaque sommet est 3) et/ou faire un schéma.

EXERCICE 7

Amina, Bouba, Chimi, Doubla et Edzoa se sont serrés les mains.

❶ Représente cette situation à l'aide d'un graphe.

❷ Détermine le nombre de poignées de main.

❸ **Généralisation :** Les 40 élèves de la classe de 1^{ere}CD du lycée Bilingue de Bocklé se saluaient chaque matin. À cette occasion, chaque élève serre la main de tous les autres élèves.

Détermine le nombre de poignées de mains échangées.

EXERCICE 8

Un tournoi de Ludo oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

❶ Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.

❷ Quel type de graphe obtenez-vous ?

❸ Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?

❹ Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matchs.

EXERCICE 9

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit **régulier.** Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est $k-$régulier.

On s'intéresse aux graphes $3-$réguliers. Construisez de tels graphes ayant $4, 5, 6$ puis 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ? prouvez-le !

EXERCICE 10

Etant donné un groupe de 10 personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de i	$3, 6, 7$	$6, 8$	$1, 6, 7$	$5, 10$	$4, 10$	$1, 2, 3, 7$	$1, 3, 6$	2		$4, 5$

❶ Représentez cette situation par un graphe.

❷ Ce graphe est-il complet ? Connexe ?

❸ Si l'adage " les amis de nos amis sont nos amis " était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

EXERCICE 11

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espions doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue !)

❶ Représenter cette situation par un graphe d'ordre 6.

❷ Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ?

❸ Quel est le degré de chaque sommet ? Déduidez-en le nombre d'arêtes.

EXERCICE 12

Monsieur NGNAZOKE, Monsieur WASSAIN et Monsieur KOLOBA qui sont trois professeurs d'un lycée doivent dispenser lundi prochain un certain nombre d'heures de cours dans les trois classes de Première D dudit lycée.

Monsieur NGNAZOKE doit dispenser 2 heures en première D1 et 1 heure en première D2 ;

Monsieur WASSAIN doit dispenser 1 heure en première D1, 1 heure en première D2 et 1 heure en première D3.

Monsieur KOLOBA doit dispenser 1 heure en première D1, 1 heure en première D2 et 2 heures en première D3.

Monsieur le Censeur de l'établissement aimerait produire un planning de lundi pour ces professeurs.

❶ Représenter cette situation par un graphe ?

❷ Quel type de graphe obtenez-vous ?

❸ Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?

❹ Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

EXERCICE 13

Le conseil municipal d'une ville comprend **7 commissions,** qui obéissent aux règles suivantes :

Règle 1 : Tout conseiller municipal fait partie de **2** commissions exactement ;

Règle 2 : Deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Tâche : Combien y'a-t-il de membres dans ce conseil municipal ?

Bonne Chance ! ! !

FICHE DE TRA VAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES SUR LES TRANSFORMATIONS DU PLAN EN PREMIERE C POUR LA RENTREE DU PREMIER JUIN 2020

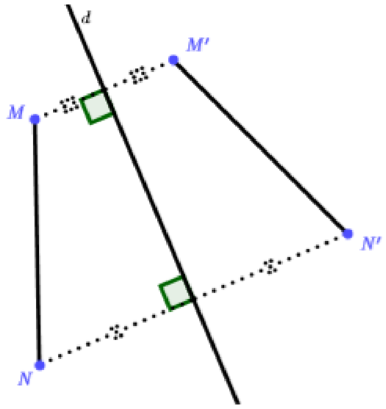
Objectifs du chapitre

o Donner la nature de la composée de deux symétries orthogonales selon que les axes sont parallèles ou non ;
o Ecrire une translation comme composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles ;
o Ecrire une rotation comme composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants ;
o Caractériser la composée de deux rotations de même centre ; de deux rotations de centres distincts ;
o Donner la nature et les éléments caractéristiques de la composée : d'une translation et d'une symétrie orthogonale dont le vecteur de la translation est normal à l'axe de la symétrie ;
o Caractériser la composée de deux translations ;
o Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée : • de deux homothéties de même centre ou de centres distincts ; • d'une homothétie et d'une translation ; • d'une homothétie et d'une rotation de même centre.
o Utiliser les transformations pour justifier des propriétés des configurations planes ou pour résoudre des problèmes.
o Définir analytiquement une translation, une homothétie.
o Reconnaître une translation ou une homothétie à partir d'une définition analytique.
o Définir analytiquement la composée de deux applications de définitions analytiques respectives connues :
o Montrer qu'une application du plan dans lui-même est une transformation ;
o Montrer qu'une application de définition analytique connue est une transformation, puis définir analytiquement sa réciproque

quelques rappels

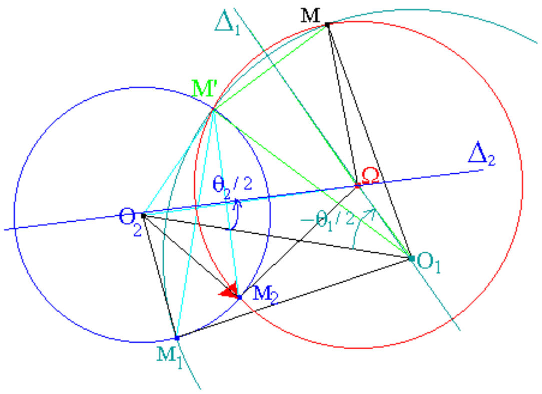
Les symétries orthogonales

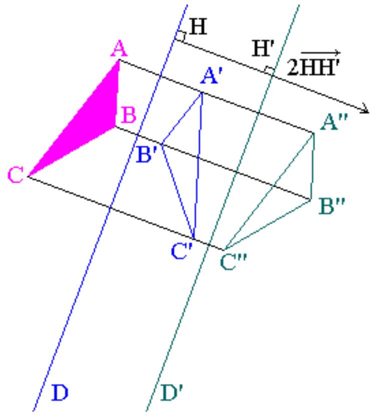
On dit que M′ est le transformé de M par la symétrie orthogonale d'axe la droite d si d est la médiatrice du segment [MM′], pour M n'appartenant pas à d et M′ = M pour M appartenant à d.



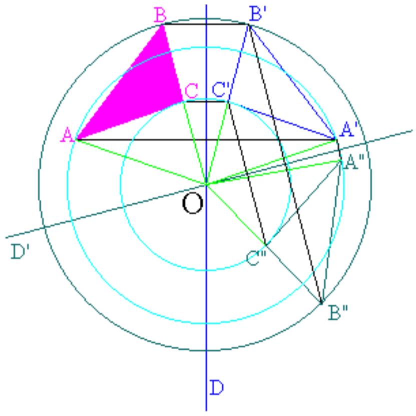
1. Composée de deux symétries orthogonales

Soient S_D et $S_{D'}$ deux symétries orthogonales respectivement d'axe D et D' .
Si les droites D et D' sont strictement parallèles, soit H un point quelconque de D et H' son projeté orthogonal sur la droite D', la composée de la symétrie orthogonale S_D suivie de la composée $S_{D'}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$





- Si les droites D et D' sont sécantes en un point O , la composée de la symétrie orthogonale SD suivie de la composée SD' est la rotation de centre O et d'angle 2 (D ; D')

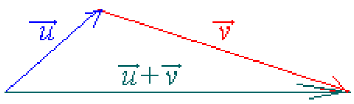


- Si D = D' , la composée est l'identité du plan , ou tout point est sa propre image.

2. Composée de deux translations

   la composée de la translation $t_{\vec{u}}$ suivie de la translation $t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$:

$t_{\vec{u}}$ o $t_{\vec{v}}$ $=t_{\vec{u}+\vec{v}}$

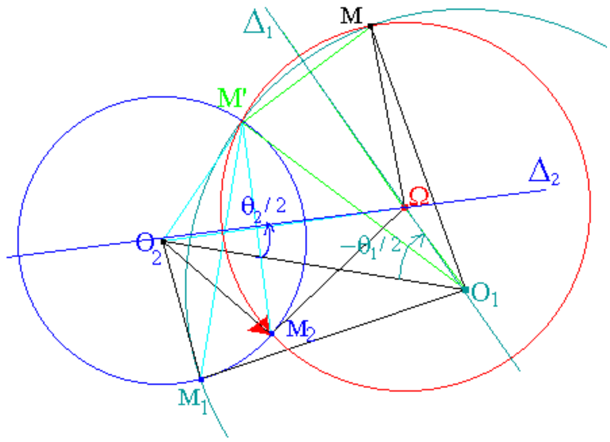


3. Composée de deux rotations

   On considère deux rotations r1 et r2 de centres respectifs O1 et O2, et d'angle respectif de mesure θ_1 et θ_2 , la composée de de ces deux rotations peut être suivant les cas une rotation d'angle d'angle $\theta_1+\theta_2$ ou bien une translation.

   cette composée est une translation est un translation si les droites Δ1 et Δ2 sont parallèles quand $\theta 1+\theta 2 = k2\pi$ avec k ∈ ℤ

   cette composée est une rotation de centre Ωle point d'intersection de Δ1 et Δ2 si Δ1 et Δ2 sont sécantes, l'angle de cette rotation est $\theta 1+\theta 2$



4. Composée d'une rotation et d'une translation

   la composée de la translation t suivie de la rotation de centre O et d'angle de mesure est encore une rotation d'angle de mesure de même que la composée de la rotation de centre O et d'angle de mesure suivie de la translation t.

Questions de cours

Les isométries

O1 : Sais-tu-ce que c'est qu'une isométrie du plan ?

O2 : Peux-tu donner la propriété caractéristique d'une isométrie ?

O3 : Peux-tu citer :

a) 03 exemples d'isométries au programme de 1ère C ?

b) 01 exemple de transformation au programme qui n'est pas une isométrie ?

O4 : Les isométries conservent 08 choses. Peux-tu les citer ?

O5 : Sais-tu-ce que donne :

a) La composée de deux isométries ?

b) La réciproque d'une isométrie ?

O6 : a) Il existe deux types d'isométries le sais-tu ?

b) Peux-tu donner la caractéristique de chaque type ?

O7 : Sais-tu-ce que donne :

a) La composée de deux déplacements ? Donner deux exemples

b) La Composée de deux antidéplacements ? Donner un exemple

c) La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement

d) La réciproque d'un déplacement ?

e) La réciproque d'un antidéplacement ?

O8 : a) Sais-tu-ce que veut dire triangles isométriques ?

b) Peux-tu donner un synonyme de « isométrique » ?

c) Peux-tu donner une propriété des triangles isométriques ?

O9 : on donne le point A et cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r.

P étant un point de $(\mathcal{C})$. On désigne par M le milieu du segment $[AP]$.

Rechercher le lieu géométrique du point M lorsque P décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

A- Les translations

O1 : Peux-tu donner la définition vectorielle d'une translation t de vecteur $\vec{u}$?

O2 : Peux-tu donner la propriété caractéristique d'une translation ?

O3 : Peux-tu donner l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$ (a ; b)

O4 : Sais-tu-ce que donne :

a) La translation de vecteur nul ?

b) La réciproque de la translation $t_{\vec{u}}$?

c) La composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$?

O5 : La composée de deux translations est-elle commutatives ?

B- Les symétries orthogonales

O1: Peux-tu définir la symétrie orthogonale d'axe Δ ?

O2 : Peux-tu donner l'ensemble des points invariants par une symétrie orthogonale D'axe Δ ?

O3 : Sais- tu ce que donne :

a) La composée de deux symétries orthogonales d'axes Δ ?

b) La réciproque d'une symétrie orthogonale d'axe Δ ?

b) La composée de deux symétries orthogonales d'axes Δ et Δ' parallèles ?

c) La composée de deux symétries orthogonales d'axes Δ et Δ' sécants en un point A ?

d) La composée de deux symétrie orthogonale est-elle commutative ?

O4 : Peux-tu alors décomposer

a)Une translation de vecteur u ?

b) Une rotation r(A , α) ?

O5 : Peux-tu donner les expressions analytiques des symétries orthogonales d'axes Δ particulières suivantes ?

a) Δ est parallèle à l'axe des abscisses

b) Δ est parallèle à l'axe des ordonnées

c) Δ est la première bissectrice du repère

C- Les rotations

O1 :Peux-tu définir la rotation r de centre A et d'angle α ?

O2 : Admet-elle un ensemble de points invariants ?

O3 : Sais- tu ce que donne :

a) La rotation de centre A et d'angle nul ? (peux-tu donner l'ensemble de ses points invariants)

b) La rotation de centre A et d'angle π ? (peux-tu donner l'ensemble de ses points invariants)

O4 :Peux-tu donner la propriété caractéristique d'une rotation d'angle α non nul?

O5 : Sais- tu ce que donne :

a) La réciproque d'une rotation r de centre A et d'angle α ?

b) La composée de deux rotations de centre A et d'angles α et α' ?

c) Cette composée est-elle commutative ?

d) La composée de deux rotations de centre A et A' et d'angles respectifs α et α'dans les cas suivants :

*) $\alpha + \alpha' \neq 0$

*) $\alpha + \alpha' = 0$

*) $\alpha + \alpha' = \pi$

Exemple de transformation qui n'est pas une isométrie :

-Les homothéties

O1 : Peux-tu donner :

a) La définition vectorielle d'une homothétie de centre Ω et de rapport k non nul ?

b) La propriété caractéristique d'une homothétie de rapport k ?

c) L'expression analytique d'une homothétie de centre Ω et de rapport k ?

d) L'ensemble des points invariants par cette homothétie $h_{(\Omega, k)}$?

e) La réciproque d'une homothétie h de centre Ω et de rapport k ?

O2 Les homothéties conservent 05 choses le sais-tu ?

O3 : Sais-tu-ce que donne :

a) Une homothétie de rapport 1 ?

b) Une homothétie de rapport -1 ?

O4 : Peux-tu déterminer une homothétie

a) Connaissant son centre, un point et son image ?

b) Connaissant deux point et leurs images ?
c) Connaissant son rapport, un point et son image ?

O5 : Soit A , B , I des points et A' , B' I' leurs images respectives par h. Sais- tu ce que donne :

a) l'image d'une droite Δ passant par A ?
b) L'image d'une demi droite [AB) ?
c) L'image d'un segment [AB] ?
d) L'image d'un cercle C de centre I et de rayon r ?
e) L'image du cercle C de diamètre [AB] ?

O6 : Quels sont les éléments qu'une homothétie conserve ? (04)

O7 : Quels effets les homothéties ont sur :

a) les distances ?
b) Les aires ?
c) Les volumes ?

O8 : Sais- tu ce que donne :

a)La composée de deux homothéties de même centre Ω et de rapports respectifs k et k' dans les cas suivants :

*) kk' $\neq$ 1
*) kk' = 1
*) kk' = -1
*) La composée d'une telle homothétie est-elle commutative ?

O9 : Sais- tu ce que donne :

a) La composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport k et d'une translation ?
b) La composée d'une homothétie et d'une
*) Isométrie positive ?
*) Isométrie négative ?

O10 : Quels sont les éléments caractéristiques d'une similitude directe ?

O11 : Quels effets les similitudes directes ont sur :

d) les distances ?
e) Les aires ?
f) Les volumes ?
g) Les angles des figures ?
h) L'alignement des points ?
i) Le parallélisme et l'orthogonalité
j) Les contacts ?
k) Les formes des figures ?
l) Les barycentres ?

O12 : Sais- tu à quelles condition deux triangles sont semblables ? (il y en a 03)

EXERCICE 1

I/ ABCD est un carré direct dont les diagonales se coupent en I. On désigne par J le milieu du segment [BC], r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1) a) Déterminer la droite (D) telle que $t = S_{(IJ)} o S_{(D)}$.
b) Déterminer la droite (D') telle que $r = S_{(D')} o S_{(IJ)}$.

2) En déduire la nature de la transformation du plan $f = rot$.

II/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit (Δ) la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$ et $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1) Déterminer l'expression analytique de $t_{\vec{u}}$.
2) On désigne par h, l'homothétie de centre $A(1,2)$ et de rapport 2. Déterminer son expression analytique.
3) Déterminer l'expression analytique de l'application $g = hot$.
4) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ'), image de (Δ) par g.

EXERCICE 2 :

$ABCD$ est un carré de centre O tel que $AB = 6cm$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) = +\frac{\pi}{2}$.

1. Soit r la rotation qui transforme D en C et B en A .
a) Donner le centre et l'angle de r.
b) Déterminer en justifiant l'image du segment $[AD]$ par r .
2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.
a) Construire les points I et J tels que $h(C) = I$ et $h(B) = J$.

b) Soit O un point de$[BC]$. Montrer que O' l'image du point Opar h appartient à $[IJ]$.

3. On pose $f = hor$
   a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de$f$.
   b) Construire les points L et K , images respectives de A et B par f.
   c) Calculer l'aire du quadrilatère $IJKL$.

EXERCICE 3

ABC est un triangle rectangle en C tel que $BC = 2cm\ et\ AC = 3cm$. Soit I le barycentre des points pondérés $(A,2);\ (B;5)\ et\ (C,-3)$ et J est le defini par : $2\overrightarrow{BJ} = -3\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que I est le milieudu segment $[AJ]$.
2. Faire une figure et placer les points $I\ et\ J$.
3. Déterminer er construire l'ensemble(C) des points M du plan tels que : $AM^2 + JM^2 = 35$.
4. Soit h la transformation du plan qui à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$.
   a) Montrer que le point Iest invariant par h.
   b) Montrer que h est une homothétie dont on precisera ses éléments géométriques.

EXERCICE . 4

1. Soit ABCDEFGH un cube d'arête 3 cm. Soit I le centre de gravité du carré ABCD.
(a) Faire la figure.
(b) Justifier sans calculer les distances que le triangle IFB est rectangle (On précisera le sommet de l'angle droit).
(c) Déterminer la longueur de chaque coté du triangle IFB, puis retrouver, en utilisant la propriété réciproque de Pythagore, le résultat de la question précédente.
2. Soit h la transformation du plan dont l'expression analytique est donnée par le système :

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

(a) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par h.
(b) Soient $A(a;b)$ un point du plan et $A'(a';b')$ l'image de A par h.
i. On désigne par J le milieu du segment $[AA']$. Justifier que $J \in (D)$.
ii. Démontrer que les droites (AA') et (D) sont perpendiculaires.
(c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

EXERCICE 5

I) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') tel que : $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 3 \end{cases}$

1. Déterminer les coordonnées de l'unique point Ω , invariant par f.
2. Etablir une relation vectorielle entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$
3. En-déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
4. Déterminer l'expression analytique de la réciproque f^{-1} de f.
5. Soit (C) le cercle de centre A(1, 0) et de rayon 3.
a) Donner une équation cartésienne de (C).
b) Déterminer une équation de (C'), image de (C) par f.
c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (C').

II) ABCD est un losange de sens direct tel que $mes\ \hat{A} = \frac{\Pi}{3}$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : $f = S_{(BC)}oS_{(AD)}\ et\ g = S_{(CD)}oS_{(AB)}$.
2. Démontrer que $fog\ =\ gof = t_{\overrightarrow{AC}}$

EXERCICE 6 :

Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé (O,I, J). E et F sont deux points du plan de coordonnées respectives (3,2) et (-1,-2)

1-Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par E et F .

2-Soit F la transformation du plan qui, à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que : $\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x-1 \end{cases}$

   a) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par F
   b) Démontrer que le milieu H de [MM'] appartient à (D)
   c) Démontrer que la direction de [MM'] est orthogonale à (D)
   d) En déduire la nature de F

3- Déterminer $Fo\ F$

4- Soit T la translation de vecteur

a)Déterminer l'expression analytique de Fo T

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par Fo T

c) Quelle est la nature de Fo T ?

EXERCICE 7 :

Soit ABCD un carré et f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M fait correspondre le point M' défini par : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

1-Déterminer l'ensemble des points invariants par f

2- Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport

3- Soit G_A le centre de gravité du triangle BCD, G_B le centre de gravité du triangle ACD et G_C le centre de gravité du triangle ABD

a)Déterminer $f(G_A)$, $f(G_B)$ et $f(G_C)$

b)Soit M un point du plan et D_A la droite parallèle à (MG_A) passant par A, D_B la droite parallèle à (MG_B) passant par B et D_C la droite parallèle à (MG_C) passant par C

Montrer que les droites D_A , D_B et D_C sont concourantes en un point que l'on précisera.

Par ***ETIENNE NJANKO***

DENOMBREMENT

INTERET :

Utiliser les outils mathématiques pour mieux compter, pour mieux déterminer le nombre d'éléments dans une expérience de comptage.

INTRODUCTION

- Dénombrer c'est compter. Et pour cela, nous avons plusieurs outils comme le comptage direct, l'arbre de choix…Plus le nombre d'éléments est grand, plus le comptage devient difficile et nous devons faire appel à d'autres outils mathématiques plus adaptés.

QUELQUES RAPPELS :

DEFINITION 1 : On dit d'un ensemble E qu'il est **fini** si et seulement E est vide ou s'il possède un nombre fini d'éléments.

Dans ce dernier cas, l'entier n est unique et c'est le **cardinal** de E ; noté **Card E**. Par convention, $Card\ \emptyset = 0$. L'entier Card E représente le nombre d'éléments de E.

THEOREME 1 : Soient E et F deux ensembles finis disjoints. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et on a : $Card(E \cup F) = CardE + CardF$.

COROLLAIRE 1 : Soit A un sous ensemble d'un ensemble fini E. Alors le complémentaire de A dans E est noté $\bar{A}$ et on a : $Card\bar{A} = CardE - CardA$.

COROLLAIRE 2 : Soit A un sous ensemble d'un ensemble fini E. Alors on a :

$\boldsymbol{CardA \leq CardE}$.

PROPRIETE 1 : Soient A, B et C trois ensembles finis.

$Card(A \setminus B) = CardA - Card(A \cap B)$, $Card(A \cup B) = CardA + Card - Card(A \cap B)$;

THEOREME 2 :

Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est un ensemble fini et

$\boldsymbol{Card(A \times B) = CardA \times CardB}$.

En particulier, $Card(E^p) = (CardE)^p$

THEOREME 3 :

- Le nombre de **p-listes** ou encore **p-uplets** de p éléments d'un ensemble E de cardinal n est $\boldsymbol{n^p}$. On utilise les P-listes dans les **tirages successifs avec remise.**

Exemple : Une porte s'ouvre à l'aide d'un code de 04 chiffres pris dans l'ensemble

$E = \{-2;\ -1; 0; 3; 5\}$. Combien de codes peut-on former ?

R : pour le premier chiffre de notre code, nous avons 5 possibilités. Il en est de même pour le deuxième, troisième puis quatrième chiffre. D'où $\mathbf{5^4 = 625\ codes}$.

- Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de Cardinal n est noté $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$
  On utilise les arrangements dans les **tirages successifs sans remise**.

Exemple : Dans le championnat MTN Elite Two du Cameroun, les trois premiers accèdent directement en MTN Elite One. Sachant que le championnat MTN Elite Two compte 20 équipes, de combien de manières peut-on choisir les trois équipes pour le MTN Elite One ?

R : Pour choisir la première équipe, nous avons 20 posssibilités. La deuxième 19 possibiltés et la troisième 18 possibilités d'où $\mathbf{A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840}$ **manières**.

- Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est noté $n!$ C'est encore le nombre d'arrangements de n éléments dans un ensemble de n éléments.

Exemple : De combien de manières peut-on ranger 20 voitures dans un parking ayant 20 places ?

R : $\mathbf{A_{20}^{20} = 20!}$

- Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E de cardinal n est noté $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
- On utilise les combinaisons dans les **tirages simultanés sans remise.**

Exemple : Dans un groupe de 10 élèves, on choisit 3 pour représenter la classe à une émission. De combien de manières peuvent s'effectuer ces choix ?

R : Dans ce tirage, il y'a pas d'ordre dans le choix des élèves et un élève ne peut être choisi 2 fois donc on aura : $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = \mathbf{120}$ **manières.**

QUELQUES EXERCICES

EXERCICE 1 :

Dans une classe de PC, il y a 50 élèves dont 24 ont 16 ans, 14 ont 17 ans et les autres ont plus de 17 ans. 23 élèves ont opté pour l'espagnol et les autres pour l'allemand. 13 élèves de 16 ans font l'espagnol, 10% de ceux qui ont plus de 17 ans font l'allemand.

1. Complète le tableau :

2ème Langue / Âge				TOTAL
TOTAL				50

2. Comment appelle-t-on ce type de tableau ?

3. Combien d'élèves n'ont pas 16 ans et ne font pas espagnol ?

EXERCICE 2 :

Dans une classe de 105 élèves tenue par Honoré, 60 étudient l'anglais, 80 le français, 75 l'allemand, 45 l'anglais et le français, 40 l'anglais et l'allemand, 60 le français et l'allemand et 30 élèves étudient les trois langues. Le code d'ouverture du coffre-fort de Honoré est constitué d'un nombre de 4 chiffres pris dans l'ensemble $\{1; 2; 4; 6; 7; 0\}$ suivi d'un mot de deux lettres pris dans l'ensemble des lettres de l'alphabet français. Honoré qui est fan de foot suit régulièrement un championnat de 20 équipes. Chaque équipe du championnat doit affronter toutes les autres équipes en matchs aller et retour.

1. Combien d'élèves ne font aucune des trois langues ?
2. Combien de codes possibles Julie peut-elle composer ?
3. Aide Honoré à déterminer le nombre de matchs du championnat.

EXERCICE 3 :

Le restaurant de M. Etienne propose à ses clients le tableau suivant appelé

'' MENU DU JOUR ''. Un menu est composé d'une entrée, d'un plat de résistance et d'un dessert.

Catégories	Description	Prix
Entrées	Avocat	600
	Salade	1 000
	Carottes	600
Plat de résistance	Taro sauce jaune	2 500
	Roti de viande + Riz	1 500
	Trippes + Plantain	1 500
Desserts	Salade de fruits	1 000
	Yaourt	600
	Boisson Chaude	600

1. Déterminer le nombre de menus que M. Etienne peut proposer.
2. Déterminer le nombre de menus ayant pour dessert le Yaourt.
3. Déterminer le nombre de menus ayant une entrée à 600 francs, un plat de résistance à 1500 francs et un dessert à 600 francs.
4. Déterminer le nombre de menus qui coûtent exactement 3100 francs.

EXERCICE 4 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes constitués de trèfles, de piques, de carreaux et de cœurs. Les cœurs, trèfles, piques et carreaux sont des couleurs. Chaque couleur comporte trois figures (1 valet, une dame et un roi) et 5 autres cartes (1 as, un 7, un 8, un 9 et un 10).

1. On extrait successivement deux cartes de ce jeu. De combien de façons peut-on obtenir :
   a) Deux cartes de mêmes couleurs ?
   b) Deux cœurs ?
   c) Deux cartes de couleurs différentes ?
2. Une expérience consiste à tirer simultanément 2 cartes de ce jeu. Si l'on obtient deux figures, l'on gagne 5000 frs mais si l'obtient une seule figure, on ne gagne rien et si l'on obtient aucune figure, on perd 1000 frs. De combien de façons peut-on :
   a) Gagner 500O frs ?

b) Ne rien gagner ?
c) Perdre 1000 frs ?

EXERCICE 5 :

Trois élèves Carelle, Becale et Ange sont appelées à effectuer un jeu qui consiste à tirer deux boules dans une urne qui contient 4 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules jaunes toutes indiscernables au toucher.

- Carelle effectue un tirage simultané deux boules dans l'urne. Elle gagne si elle tire au moins une boule verte ;
- Becale effectue un tirage successif sans remise de deux boules dans l'urne. Elle gagne si elle tire exactement deux boules de même couleur ;
- Ange effectue un tirage successif avec remise de deux boules dans l'urne. Elle gagne si elle tire deux boules de couleur différentes.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles pour que Carelle gagne.
2. Déterminer le nombre de tirages possibles pour que Becale gagne.
3. Déterminer le nombre de tirages possibles pour que Ange gagne.

EXERCICE 6 :

Un clavier à 8 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble à l'aide d'une lettre suivi d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non. Les touches du clavier sont les éléments de la liste $E = \{A,\ B, C, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y-a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y-a-t-il des codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y-a-t-il des codes comportant des chiffres deux à deux distincts ?
5. Combien y-a-t-il de codes commençant par la lettre B et comportant au moins deux chiffres identiques ?

EXERCICE 7 :

Christian et Boris font partir d'un club de 12 personnes. On doit former un groupe constitué de 5 d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.

1. Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?
2. Dans combien de ces groupes peut figurer Christian ?
3. Christian et Boris ne pouvant se supporter, combien de groupes de personnes peut-on constituer de telle façon que Christian et Boris ne se retrouvent pas ensemble.

EXERCICE 8 :

A l'occasion de la prochaine coupe d'Afrique des Nations de Football, l'usine des Brasseries du Cameroun voudrait organiser un jeu concours. Ce jeu consiste à mettre sur le marché des bouteilles gagnantes. Pour cela, il faut imprimer sur un certain nombre de capsules un nombre de 5 chiffres choisis parmi ceux de la liste

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1. Déterminer le nombre de capsules à imprimer.
2. Déterminer le nombre de capsules à imprimer dont le nombre inscrit :

a) Contient des chiffres tous distincts.
b) Contient des chiffres tous distincts dont l'un d'entre eux est pair.

3. Toute capsule portant un nombre se terminant par 7 gagne un écran de télévision, celles dont le nombre inscrit commence par 765 gagne un billet d'avion.

a) Combien d'écrans de télévisions peut-on gagner ?
b) Combien de billets d'avions peut-on gagner ?

EXERCICE 9 :

Une course oppose 20 concurrents dont Etienne.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Etienne est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Etienne fait partir ?
4. On souhaite récompenser les trois premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

EXERCICE 10 :

Dans une ville, il y-a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire.
2. Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Reprendre la même question si chaque jour il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

EXERCICE 11 :

Une urne contient 5 boules dont 3 blanches et 2 rouges. On extrait successivement et sans remise deux boules de cette urne. Combien de tirages contiennent :

1. Les boules de même couleur ?
2. Au moins une boule blanche ?

TRAVAUX DIRIGÉS POUR LE COMPTE DE LA RENTREE DU PREMIER JUIN 2020 : STATISTIQUE

PARTIE A: Rappels du cours

Soit [a ; b [une classe ;

On note par :

n : Effectif de la classe [a ; b [;

$N = \sum_{i=1}^{n} n_i$: Effectif total de la série statistique

$Ci = \frac{a+b}{2}$: Centre de la classe [a ; b [;

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\, C_i$: La moyenne de la série statistique ;

$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\, |C_i - \bar{x}|$: Écart moyen de la série statistique ;

$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\, {C_i}^2 - \bar{x}^2$: La variance de la série statistique ;

$\sigma = \sqrt{V}$: écart-type de la série statistique.

- **centres d'intérêts : classe modale, mode, effectifs cumulés, moyenne, variance, écart-type, écart moyen, intervalle moyen.**

- La **classe modale** est la classe ayant le plus grand effectif.
- Le **mode** est le centre de la classe modale.
- On appelle **effectif cumulé croissant** d'une modalité, le nombre d'individu dont l'effectif est inférieur ou égal à cette modalité.
- On appelle **effectif cumulé décroissant** d'une modalité, le nombre d'individu dont l'effectif est supérieur ou égal à cette modalité.
- On appelle **médiane** d'une série statistique la modalité qui correspond à la moitié de l'effectif total.
- L'intervalle] $\bar{x}- \sigma$; $\bar{x}$ + [est appelé **intervalle moyen**. Le pourcentage d'observations contenues dans cet intervalle donne une mesure de la concentration des observations autour de la moyenne

PARTIE B: EVALUATION DES RESSOURCES

- **Relier chaque formule à sa définition :** être capable de reconnaitre les différentes formules qui renvoient à la statistique

Formules	Définitions
$\frac{n}{A}$	L'écart-type de la série statistique
$\boldsymbol{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\, C_i}$	L'intervalle moyen
$b-a$	L'écart moyen de la série statistique
$\boldsymbol{\frac{a+b}{2}}$	La moyenne de la série statistique
$[\bar{x}-\sigma;\ \bar{x}-\sigma]$	La variance de la série statistique
$\boldsymbol{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\, {C_i}^2 - \bar{x}^2}$	Le centre de la classe [a ; b [
$\boldsymbol{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\, \lvert C_i - \bar{x}\rvert}$	Densité de la classe [a ; b [
$\boldsymbol{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\, {C_i}^2 - \bar{x}^2}}$	Amplitude de la classe [a ; b [

<u>EXERCICE 1</u> caractéristiques de position

I- Répondre par vrai ou faux

Les 250 ouvriers d'une entreprise sont répartis suivant leur salaire journalier (en milliers de francs) dans le tableau ci-dessous :

Salaire	[0 ; 2[	[2 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[
Effectifs	A	b	75	c	36

1) L'effectif total des ouvriers vérifie la relation : $a+b+c=139$.
2) Dire que l'effectif cumulé de la modalité 8 est de 160, traduit que : $a+b=95$.
3) la moyenne de la série est de 7,036, traduit que : $\frac{1}{2}a+2b+5c=365$.

II- Questions à choix multiple

Les notes de mathématiques de 200 élèves ont été enregistrées dans le tableau ci-dessous :

Salaire	[0 ; 5[	[5 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 17[
Effectifs	0,2	0,25	0,1	0,3	0,15

1) La fréquence cumulées croissantes de la classe $[9{,}12[$ est :

a) 0,2 b) 0,85 c) 0,55 d) 0,45

2) L'effectif de la classe $[5,9[$ est :

a) 40 b) 50 c) 20 d) 60

3) La moyenne générale de la classe est :

a) 97,5 b) 9,75 c) 0,9 d) 2

4) La médiane de cette série statistique est :

a) 11,2 b) 10,5 c) 1,05 d) 8,5

<u>EXERCICE 2</u> Construire et interpréter le diagramme des effectifs cumulés

Le magasin AVAIKA fait la liste des capacités des disques durs en Go des ordinateurs qu'il propose à la vente. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Capacité en Go	[50 ; 80[	[80 ; 150[	[150 ; 300[	[300 ; 1000[
Effectif	11	22	13	4

1) Combien d'ordinateurs sont proposés à la vente dans ce magasin ?
2) Calculer la moyenne de cette série statistique.
3) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants ainsi que celui des fréquences cumulés croissantes et décroissantes
4) Quel est le pourcentage d'ordinateurs dont la capacité en Go est inférieure à 150 ?
5) Quel est le pourcentage d'ordinateurs dont la capacité en Go est supérieure à 80 ?

<u>EXERCICE 4</u> :

On donne dans le tableau suivant les salaires annuels en milliers de Francs sur un groupe de 1000 personnes :

Salaire	[9 ; 10[	[0 ; 11[	[11 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectif	50	50	50	256	244	125	125	100
Effectifs cumulés croissants								

1) Calculer le salaire annuel moyen en indiquant les calculs effectués
(Arrondir au millier de franc).
2) Compléter la troisième ligne du tableau (effectifs cumuls croissants).
3) Dresser le diagramme des effectifs cumulés croissants dans un repère (ne pas oublier la légende sur chacun des axes)
4) Déterminer la valeur de la médiane (arrondie aux dixièmes si nécessaire).

<u>EXERCICE 5 :</u> Construire et interpréter le diagramme des fréquences cumulés

En une semaine, un ouvrier usine 50 pièces cylindriques identiques dont les diamètres en mm sont donnés ci-dessous :

85,02	84,87	85,08	85,01	85,00	84,85	85,12	84,94	84,94	84,97
85,05	84,83	85,06	84,88	84,95	85,08	84,92	84,89	84,91	84,92
84,90	84,90	85,12	85,00	85,00	84,96	84,93	84,92	85,03	84,96
85,03	84,95	84,85	85,00	85,00	84,96	84,93	82,92	85,03	84,96
85,16	85,00	84,84	85,07	84,94	84,98	84,97	84,97	84,90	84,94

1) Regrouper les données ci-dessous en classes d'amplitude 0,05 en commençant à 84,40mm.
2) Dresser le tableau des fréquences (en pourcentage).
3) Dresser le tableau de fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
4) Construire un histogramme pour représenter cette série.
5) Construire les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
6) Déduire la médiane de la série statistique.

<u>EXERCICE 6</u> : intervalle moyen

Au cours d'une fabrication de fromages de chèvres, on a relevé le lot des masses suivantes des fromages :

Masse en grammes	[80 ; 85[	[85 ; 90[	[90 ; 95[	[95 ; 100[	[100 ; 105[	[105 ; 110[	[110 ; 115[
Effectif	5	9	14	18	25	16	7

1) Calculer le poids moyen d'un fromage de chèvre pour cette production.
2) Le lot des masses est accepté si les trois conditions suivantes sont remplies :

- la masse moyenne m des fromages est de 99g à 1g près.
- l'écart-type σ des masses est supérieur à 8g
- 80% au moins des masses sont dans l'intervalle$[m-\sigma;\ m+\sigma]$.

Qu'en est-il pour ce lot ?

3) Calculer les fréquences et les fréquences cumulées.
4) Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes et déterminer graphiquement la médiane.
5) Déterminer le pourcentage de fromages de chèvres ayant un poids compris entre 92 et 107 g.

<u>PARTIE C</u>: <u>EVALUATION DES COMPETENCES</u>

Objectifs : **- interpréter un intervalle moyen**
- **Interpréter un polygone**

Situation 1

Un chef d'entreprise veut savoir si la production des pièces cylindriques de diamètre théorique 25mm par une machine est bonne. Pour cela le service qualité a prélevé un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication. Voici les mesures obtenues :

Diamètres	[24,2 ; 24,4[	[24,4 ; 24,6[	[24,6 ; 24,8[	[24,8 ; 25[	[25 ; 25,2[
Effectif	5	13	24	19	14

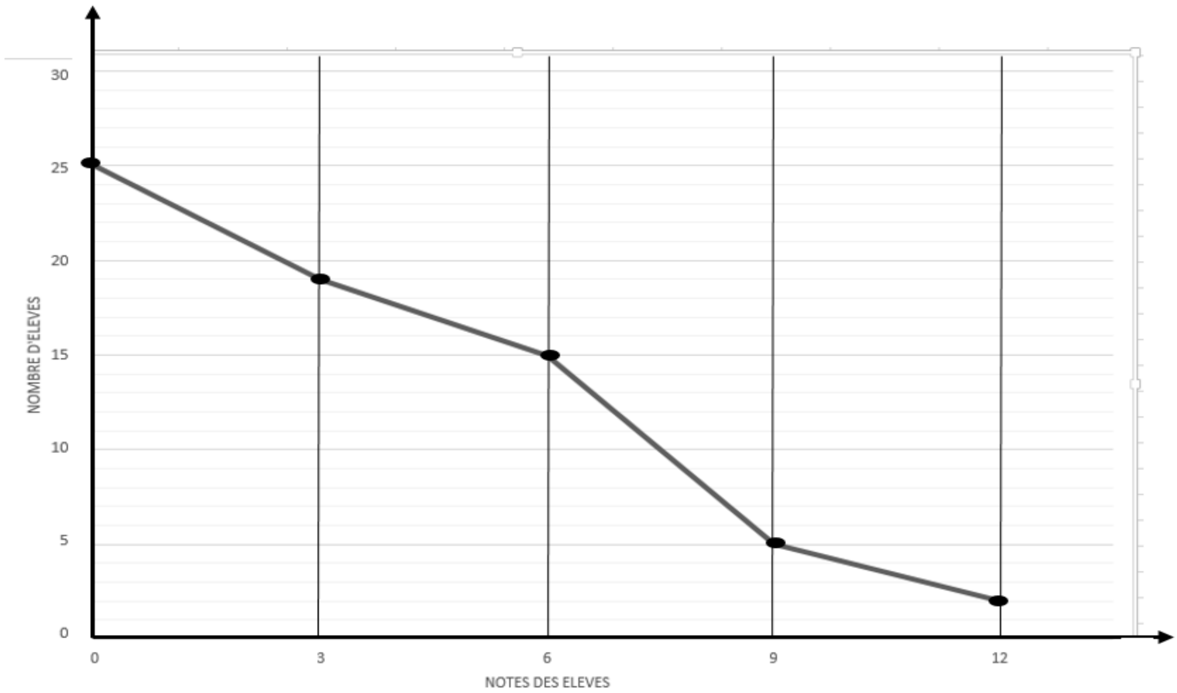
Diamètres	[25,2 ; 25,4[	[25,4 ; 25,6[	[25,6 ; 25,8[	[25,8 ; 26[
Effectif	10	8	5	2

En désignant par $\bar{x}$ la moyenne et σ l'écart-type de la série de mesure.
La production de la machine est jugée bonne si la série des mesures vérifie les trois conditions :
- $24{,}9 < \bar{x} < 25{,}1$;
- $\sigma < 0{,}4$;
- 90% au moins de l'effectif figure dans$[\bar{x} - 2\sigma;\ \bar{x} + 2\sigma]$.

<u>Tâches</u> Aider ce chef d'Entreprise à savoir si La production est-elle bonne ou pas ?

Situation 2

La classe de première C a observé un changement de professeur principal au cours de l'année scolaire 2019-2020. Ce dernier veut connaitre l'évolution du travail des élèves, à cet effet il parvient à entrer en possession du dernier rapport du conseil d'enseignement du département de mathématiques qui présente le polygone ci-dessous :



Tâche 1 Aider ce professeur à reconstituer un tableau de notes de cette classe.

Tâche 2 Combien d'élèves ont eu une note supérieure ou égale à 9/20 ?

Tâche 3 Quelle est la note moyenne de cette classe ?

Fiche de TD sur l'orthogonalité de l'espace Première C

Rappel : Premières définitions et propriétés

- Une droite de l'espace est définie de façon unique par deux points distincts de l'espace.
- Un plan de l'espace est défini de façon unique par trois points distincts non alignés.
- Si M et N sont deux points distincts d'un plan (P), la droite (MN) est tout entière incluse dans ce plan (P).
- Les théorèmes et propriétés de la géométrie plane s'appliquent dans tous les plans de l'espace.

A- droites orthogonales

▷ Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles respectives (L) et (L') passant par un même point sont perpendiculaires.

▷ Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

▷ Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

B- droite et plan orthogonaux

▷ Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P).

▷ Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.

▷ Si deux droites sont parallèles et l'une est orthogonale à un plan, alors l'autre l'est aussi.

▷ Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

▷ Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

▷ Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

▷ Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P), alors toute droite orthogonale à (P) est parallèle à (D).

C- Plans perpendiculaires

▷ Deux plans sont perpendiculaires si l'un de ces plans contient une droite orthogonale à l'autre

▷ Si deux plans sont parallèles alors, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre

▷ Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.

▷ Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

▷ Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement s'il est perpendiculaire à leur droite d'intersection

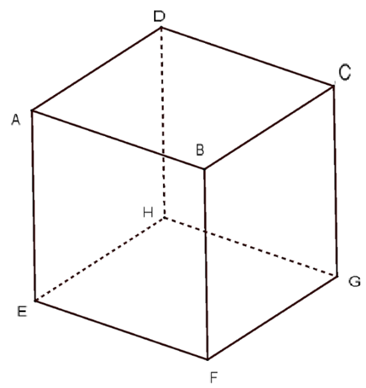
Remarque :

- Pour montrer que deux droites sont orthogonales dans l'espace, il suffit de trouver une droite qui est parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.
- Pour montrer que deux droites sont orthogonales dans l'espace, il suffit de montrer que l'une d'elle est orthogonale à un plan contenant l'autre.
- Pour montrer que deux droites sont parallèles, il suffit de montrer qu'elles sont orthogonales à un même plan.
- Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que ces deux plans sont orthogonales à une même droite.

Exercice 1 :

ABCDEFGH est un cube. Répondre par vrai ou faux en justifiant

1. Les droites (AE) et (BC) sont orthogonales.
2. Les droites (AE) et (GC) sont orthogonales.
3. Les droites (F E) et (GC) sont orthogonales.
4. Les droites (F E) et (HE) sont orthogonales.
5. Les droites (F E) et (F H) sont orthogonales.
6. Les droites (F E) et (BD) sont orthogonales.
7. Les droites (F H) et (AC) sont orthogonales.
8. Le droite (DH) est orthogonale au plan (ABC).
9. Le droite (HE) est orthogonale au plan (ABF).
10. les plan (ABC) et (DHG) sont perpendiculaires.
11. les plan (ABF) et (DHG) sont parallèles.
12. Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est le point B.
13. Le projeté orthogonal de la droite (DC) sur la droite (AB) est le point (AB).
14. Le projeté orthogonal de la droite (AD) sur la droite (AB) est le point A.
15. Le projeté orthogonal du point H sur le plan (ABF) est le point E.
16. Le projeté orthogonal de la droite (DG) sur le plan (ABF) est la droite (AF).



Exercice 2 :

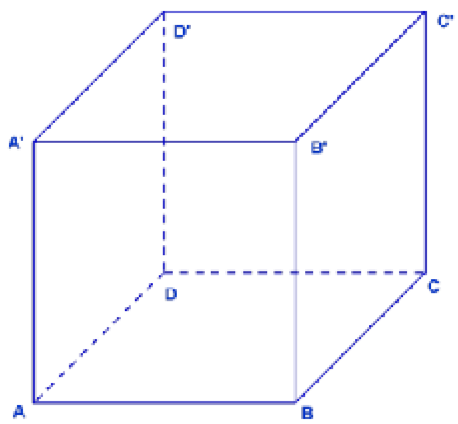
Soit ABCDEFGH un cube. Le point I est un point de l'arête [GC]. Les points M et N sont les milieux respectifs des segments [ID] et [IB].

1. Montrer que les droites (MN) et (AC), d'une part, (MN) et (EG), d'autre part, sont orthogonales.
2. (a) Montrer que (DG) est orthogonale au plan (BCH).
   (b) Montrer que (AF) est orthogonale au plan (BCH).
   (c) En déduire que (AF) est orthogonale à (EC).
3. (a) Justifier que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABF) .
   (b) En déduire que les droites (AD) et (BE) sont orthogonales
   (c) En déduire que les plans (AEF) et (BDC) sont perpendiculaires.
   (d) Démontrer que les droites (EF) et (BG) sont orthogonale.

Exercice 3 :

ABCDA'B'C'D' est un cube.

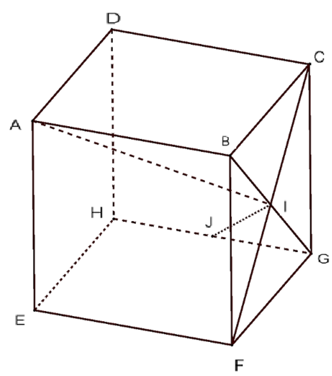
1. (a) Démontrer que la droite (AB') est orthogonale au plan (A'BC). En déduire que les droites (AB') et (A'C) sont orthogonales.
   (b) Démontrer que les droites (AD') et (A'C) sont orthogonales.
   (c) Démontrer que (A'C) est orthogonale à (AB'D').
2. (a) Monter que les plans (ABA') et (ABC) sont perpendiculaire.
   (b) Monter que les plans (ABC') et (ADA') sont perpendiculaire.
   (c) Monter que les plans (ABD') et (CDA') sont perpendiculaire.



Exercice 4 :

Soit le cube ABCDEFGH représenté sur la figure ci-contre.I est le centre du carré BCGF et J le milieu du segment [GH]. On se propose de déterminer la nature du triangle AIJ.

1. (a) Démontrer que $(AB) \perp (FBC)$ puis déduire que $(AB) \perp (FC)$.
   (b) Démontrer que $(FC) \perp (BG)$ puis déduire que $(FC) \perp (ABG)$.
   (c) Déduire que $(FC) \perp (BH)$.
2. (a) En utilisant le fait que $(BH) \perp (AC)$ montrer que $(BH) \perp (ACF)$.
   (b) En déduire que $(AI) \perp (BH)$.
3. Démontrer que le triangle AIJ est rectangle en I. (On pourra d'abord montrer que $(BH) \parallel (IJ)$)



Exercice 5 :

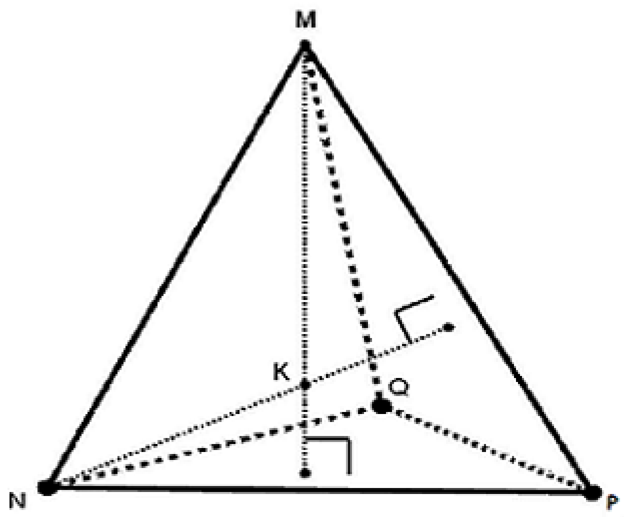
On considère un tétraèdre $MNPQ$ dont les hauteurs issues des sommets et M et N sont sécantes en un point K. Les droites $(MK), (NK), (PK)$ et (QK) sont donc orthogonales aux plans $(NPQ), (MPQ), (MNQ)$ et (MNP) respectivement.

1. (a) Montrer que les droite (MK) et (PQ) sont orthogonales ainsi que les droites (NK) et (PQ).

   (b) Démontrer que le plan (MNK) est orthogonal à la droite (QP).

   (c) En déduire que les droites (MN) et (PQ) sont orthogonales.

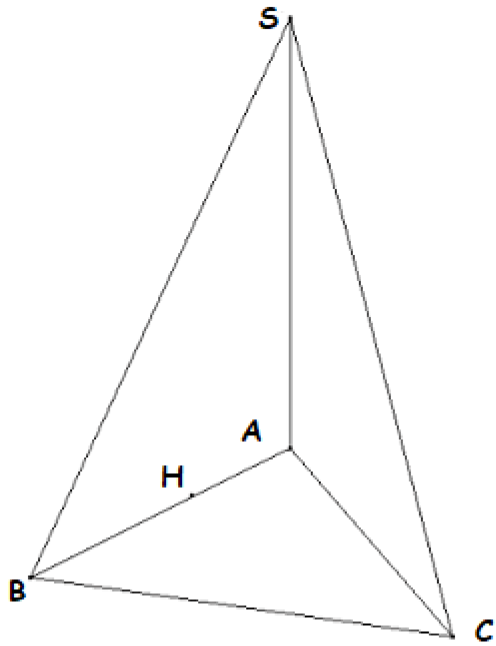
2. Démontrer que les droites (MP) et (NQ) sont orthogonales ainsi que les droites (MQ) et (NP)



Exercice 6 :

SABC est un tétraèdre, la droite (SA) est orthogonale au plan (ABC), le triangle ABC est rectangle en B (voir figure ci-dessous).

1. Démontrer que les droites (BC) et (SA) sont orthogonales.
2. Démontrer que le triangle SBC est rectangle en B.
3. H est un point de l'arête [AB]. On trace par H le plan P orthogonal à (AB). Ce plan coupe (AC) en I, (SC) en J et (SB) en K. Le but de la question est de tracer I, J et K.
   (a) Démontrer que (HI) et (BC) sont parallèles.
   (b) En utilisant le théorème du toit, en déduire que (HI) et (KJ) sont parallèles.
   (c) On admet que, par un raisonnement analogue, (HK) et (IJ) sont parallèles. En déduire que HIJK est un rectangle.
   (d) Compléter la figure.



Exercice 7 : SABCD est une pyramide de sommet S, de base un parallélogramme ABCD. Les points M et N sont les milieux respectifs des arêtes [SC] et [SB].

1. Faire une figure en perspective.
2. Que peut-on dire des droites (MN) et (AD) ?
3. Montrer que les droites (AN) et (DM) sont coplanaires. Soit P leur point d'intersection.
4. Quelle est l'intersection des plans (SAB) et (SDC) ?
5. Montrer que les droites (SP) et (AB) sont parallèles.

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. » **Francis BACON**"

Bonne chance ! ! !

Travaux diriges géométrie analytique de l'espace

la géométrie analytique est une approche de la géométrie qui décrit les objets par les équations et les inéquations à l'aide d'un système de coordonnées. Elle est donc indispensable pour de domaines variés, notamment en physique (trajectoires rectilignes, trajectoire plans, trajectoires sphériques décrites par un mobile en mouvement…), en infographie (imprimante 3D) etc.

Pre-requis

- **orthogonalité dans l'espace**
- **vecteurs du plan**
- **vecteurs de l'espace**

Thèmes abordés

- **représentations paramétriques et cartésiennes d'une droite dans l'espace**
- **représentations paramétriques et cartésiennes d'un plan dans l'espace**
- **positions relatives de droites et plans dans l'espace**
- **projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan**
- **distance d'un point à une droite ou à un plan**

L'essentiel du cours **l'espace est rapporté a un repère** $\left(O, \vec{\imath}, \overrightarrow{\jmath, \vec{k}}\right)$

A. Equation paramétrique et cartésienne d'une droite

soit (D) une droite passant par un point A de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ **et de vecteur directeur** $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$**. Un point** $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **est un point de (D) si ∃ un reel** λ **tel que** $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{U}$**. Une équation paramétrique de (D) est donnée par :**

$$\begin{cases} x = y_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

Remarque l'équation cartésienne d'une droite est obtenue en éliminant le paramètre λ **dans sa représentation paramétrique**

B. Equation paramétrique d'un plan

Soit (P) un plan passant par A$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ **et de vecteurs directeurs** $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ **. Le système de coordonnées :**

$$\begin{cases} x = y_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

avec λ, μ **éléments réels, est une représentation paramétrique** de (P)

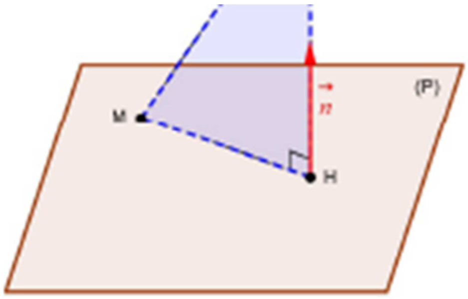
C. Equation cartésienne d'un plan

Pour déterminer l'équation cartésienne d'un plan (P) connaissant une représentation paramétrique de celle-ci, on élimine les paramètres λ *et* μ **dans l'équation paramétrique de (P), Puis on obtient son équation cartésienne sous la forme** $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$**. Où** α, β, γ *et* δ *sont des nombres réels*

D. **Vecteur normal d'un plan**

Définition

Un vecteur normal à un plan P, est un vecteur non nul $\vec{n}$_orthogonal à toutes les droites du plan



Propriété

P1) Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et H un point de ce plan. Le plan P est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{HM}.\vec{n} = 0$

P2) L'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ **non nul est sous la forme $ax + by + cz + d = 0$.**

De façon réciproque, si un plan P admet pour équation cartésienne sous la forme : $ax + by + cz + d = 0$. a,b et c non tous nuls

Alors un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Exemple soit A$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un point M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0,5(x-5) + 2(y-1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow$

$0,5x + 2y + z - 6,5 = 0$ **(*). On dit que (*) est une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$**

Remarque : deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires

E. **Positions relatives de droites et plans**

soient (D) une droite de repère (A,$\vec{u}$) , (D') de repere (B,$\vec{u}'$), (P) de vecteur normal $\vec{n}$ et (P') de vecteur normal $\vec{n}'$

a) **(D) et (D') sont parallèles si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$sont colinéaires**

b) **(D) et (D') sont sécantes si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$sont non colinéaires et $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ et $\vec{u}'$sont coplanaires**

c) **(D) et (D') sont orthogonales si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$sont orthogonaux**

d) **(D) et (D') sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes**

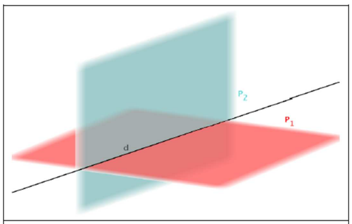
e) **(D) et (P) sont parallèles si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{n}$=0**

f) **(D) et (P) sont sécantes si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{n} \neq$0**

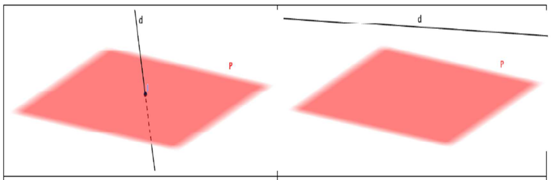
g) **(P) \\ (P') si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires**

h) **(P) et (P') sont orthogonaux si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux**

i) **(P) et (P') sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires**



Les deux plans sont sécants :
leur intersection est une droite



La droite et le plan sont sécants en un point **leur intersection est un point**

La droite est strictement parallèle au plan : **leur intersection est vide**

F. <u>Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan, distance d'un point par rapport à une droite ou à un plan</u>

soit A un point de l'espace, (D) un droite et (P) un plan. Le projeté orthogonal de A sur la droite (D) est l'unique point H de l'espace tel que H $\in$ (D) et (D) et (AH) sont perpendiculaires

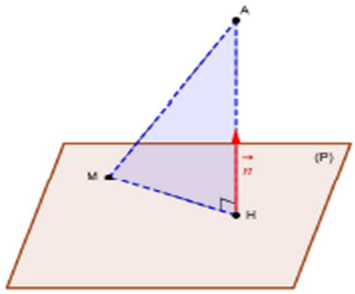
Le projeté orthogonal de A sur le plan (P) est l'unique point H de l'espace tel que H $\in$ (P) et((P) et (AH))sont perpendiculaires

soit A$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un point de l'espace et (P) un plan d'équation

$ax + by + cz + d = 0.$, a,b et c non tous nuls.

la distance du point A au plan (P) est donnée par :

d(A, (P))=AH=$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



G. **<u>remarques</u>**

- **Si deux plans (P): $ax + by + cz + d = 0$ et (P') : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécantes suivant une droite (D), alors le système d'équations $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une équation cartésienne de la droite (D)**
- **pour déterminer le point d'intersection d'un plan (P) et d'une droite (D), il est conseillé d'écrire (D) sous forme paramétrique et (P) sous forme cartésienne. En reportant la forme paramétrique de (D) dans la forme cartésienne de (P), on obtient le paramètre puis le point.**
- **Si une droite a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, pour déterminer une représentation paramétrique de cette droite on peut introduire un paramètre λ dans le système d'équation par exemple en posant z= λ**
- **Si un plan (P) a pour équation cartésienne (P): $ax + by + cz + d = 0$, pour obtenir une équation paramétrique de (P) on peut introduire deux paramètres α et β dans cette equation par exemple en posant x=α et y=β**
- **deux droites sont non coplanaires si elles sont non sécantes et non parallèles**
- **Pour démontrer que deux droites sont non coplanaires, on peut :**

- **Montrer que leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires**
- **Ecrire chacune de leurs équations paramétriques**
- **Egaliser deux à deux les systèmes de coordonnées paramétriques obtenus**
- **Montrer que le système de trois équations à deux inconnues obtenu n'admet pas de solution**

<u>EXERCICE 1</u> Choisir la seule bonne réponse pour chacune des questions ci-dessous

On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$)

1. Soit le plan (P) : x+y+z-1=0 et A$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le plan passant par A et parallèle à (P) a pour équation :

x+2y+z-5=0 ; b) x+2y+z-2=0 ; c) x+2y+z+5=0 ; d) x+2y+z-1=0

2. La distance du point et A$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ au plan d'équation x-2y+ 4z-4=0 est : a) $\frac{13}{21}$

b) $\frac{13}{\sqrt{21}}$ c) $\sqrt{\frac{13}{21}}$ d) $\frac{5}{\sqrt{21}}$

3. On donne les plans (P) et (P') d'équations respectives : x-2y+z+2=0 et x+y+z+2=0. Les plans (P) et (P') sont : a) parallèles b) confondus c) perpendiculaires d) sécantes mais non orthogonaux.

3. Soit (S) $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ -3x+y+2z=-3 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$, (P) est le plan d'équation cartésienne x+2y-3z=1 et (D) la droite définie par le système$\begin{cases} -3x+y+2z=-3 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$

a) (S) admet comme unique solution le point A(2 ;1 ;1) ; b) la droite (D) est contenue dans le plan (P) ;

c) la droite (D) et le plan (P) sont sécants ; d) le système $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=0 \end{cases}$ est autre système permettant de définir (D)

4. On donne les plans (P) et (Q) d'équations respectives 2x+y-3z+1=0 et x-y+2=0 Le plan passant par O et contenant la droite d'intersection de (P) et (Q) a pour équation :

$2x-3y+z=2$; b) x+y-2z=0 ; c) $x-3y+z=2$; d) $x+y+z=0$

<u>Exercice 2 Répondre par vrai ou faux</u>

On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$)

1)On donne les points A(-1 ;2 ;4) , B(0 ;-2 ;3), C(7 ;1 ;-1) et D(-2 ;-2 ;-13). On appelle (P) le plan médiateur de [AB] , c'est-à-dire le plan contenant les points équidistants des points A et B, mais aussi le plan perpendiculaire à [AB] et passant par le milieu de [AB] . On note Q le plan médiateur de [CD]

a. Le vecteur (8 ;-1 ;5) est un vecteur normal de Q
b. Le plan (P) a pour équation cartésienne : x+4y+z+4=0
c. A,B,C et D appartiennent à une même sphère de centre Ω(-1,2 ;-5)
d. L'ensemble des points tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$=0 est une sphère de diamètre [AB]

2) On donne les ensembles (P),(Q) et (R) d'équations suivantes : (P) :x+y=0 ; (Q) : 2x-y-z-1=0 et (R) :z=1

a. (P) est une droite
b. L'ensemble des points communs aux ensembles (P) et (R) est une droite
c. (P) et (Q) sont deux plans perpendiculaires

d. (P),(Q) et (R) se coupent au point $A(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

EXERCICE 3

ABCDEFHG est un cube.

I. Déterminer dans le repère (A ,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AE}$) une équation cartésienne du plan (BDE) et une représentation paramétrique de la droite (AG)

II. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) et le coupe en point I tel que

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$$

EXERCICE 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$;$\vec{k}$), on donne le point A (4 ;-3 ; 5) et le plan (P) d'équation cartésienne : 3x-2y+z+z=0

1. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (3 ;-2 ;1) est un vecteur normal de (P)
2. (D) est la droite passant par A et normal à (P)
   a. Déterminer une représentation paramétrique de (D)
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite (D) et du plan (P)
   c. En déduire la distance du point A au plan (P)

EXERCICE 5

L'espace affine euclidien E est rapporté à un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$;$\vec{k}$), on donne les points A (1 ;1; 1), B(-1 ;1 ;2) et le vecteur $\vec{u} = 3\vec{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + \vec{k}$. On note (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et (P) le plan passant par B et orthogonal à (D) en un point C

1. Ecrire une équation cartésienne de (P)
2. Calcule les coordonnées du point C
3. En déduire la distance du point B à la droite (D)

Exercice 6

ABCDEFGH est un cube (voir figure ci-contre)

1. Déterminer les coordonnées de C, F,G et H dans
   Le repère (A, $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AE}$)
2. Ecrire un équation cartésienne du plan (CFH)
   et calculer la distance du point G à ce plan
3. Montrer que le triangle CFH est équilatéral

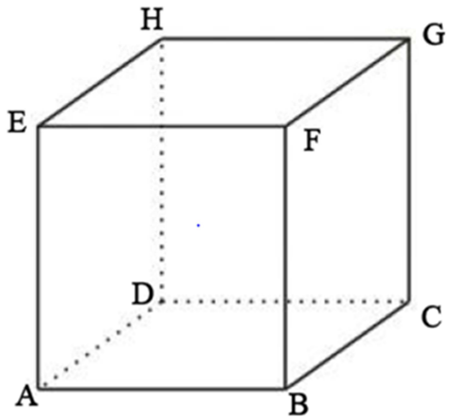
EXERCICE 7

ABCDEFGH est un cube (voir figure ci-contre)

1. En utilisant le produit scalaire la relation $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$ Démontre que la droite (AG) est Perpendiculaire au plan (CFH)

2. On suppose AB=1 et on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$. Démontre que (A,$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) est un repère Orthonormé de l'espace

3. a) Déterminer dans la base ($\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{FH}$
   a) Retrouver le résultat de la question 1)
   b) Déterminer les coordonnées de point d'intersection de la droite (AG) et du plan (CFH). En déduire la distance du point A au plan (CFH)



<u>EXERCICE 8 sphère circonscrite à un tétraèdre</u> ABCD est un tétraèdre tel que et A$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et D$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I. Soit I, J , K les milieux respectifs des arrêtes [AB], [AC] , [AD] et (P), (Q), (R) les plans médiateurs respectifs de ces arrêtes
  a. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Ecrire une équation cartésienne des plans (P), (Q), et (R)
  b. Démontre que ces plans ont un seul point commun Ω dont on déterminera ces coordonnées

II. Démontre que Ω est centre d'une sphère passant par A, B, C et D. Calculer son rayon

III. On note (Γ) la sphere de centre Ω et passant par A et (℘) désigne le plan (ABC)
  a. Ecrire une équation cartésienne de (Γ) et de (℘)
  b. Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de Ω sur (℘)
  c. Calculer d(Ω, (℘)) .
  d. (Γ) et (℘) sont –ils sécants ? si oui en déduire la nature et les éléments caractéristiques de (ℜ)= (Γ) ∩ (℘)

Travaux dirigés de Mathématiques

Sphères :

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

<u>Exercice 1</u> Équations cartésiennes

Écrire une équation cartésienne de la sphère (S)dans chacun des suivants.

a. (S) est la sphère de centre O et passant par le point $A(3;2;-1)$.
b. (S) est la sphère de centre $C(-1;0;2)$ et passant par le point $P(1;-2;2)$.
c. (S) est la sphère de diamètre $[AB]$ avec $D(1;2;-1)$ et $E(-3;4;2)$
d. (S) est la sphère qui passe par les points $F(4;2;-3)$ et $G(-1;3;1)$ et ayant son centre sur la droite (MN) avec $F(2;3;7)$ et $G(1;5;9)$

<u>Exercice 2</u> Nature et les éléments caractéristiques

Les équations suivantes sont – elles celles des sphères ? si oui, déterminer pour chacune le centre et le rayon :

a) $x^2+y^2+z^2+6x-10y-4z+22=0$
b) $x^2+y^2+z^2-12x-2y+6z+56=0$
c) $2x^2+2y^2+2z^2-2x+8y+2z-87=0$

<u>Exercice 3</u> Position relative d'une droite et d'une sphère

1. On considère la sphère $(S): x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ et la droite $(D):\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=6-2\lambda \\ z=-4+\lambda \end{cases}$.

   Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (S) et (D)
2. Soient $(S): x^2+y^2+z^2+6x-8y-2z+17=0$ et le point $A(-2;2;3)$
   a) Vérifier que A appartient à la sphère(S)
   b) Écrire l'équation d'une droite (D) tangente en A à la sphère(S).
   c) Écrire l'équation d'une droite (D') tangente en A à la sphère(S).et coupant l'axe (Oz)
3. Soit la droite (D_1) passant par le point $D(5,-1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1,4)$, (S) la sphère de centre $C(2,-1,-3)$ et de rayon 3.
   a) Déterminer les coordonnées des points A et B, points d'intersection de (D_1) et (S).

b) Déterminer l'équation cartésienne du plan (p) tangent à la sphère (S) en

Exercice 4 Position relative d'un plan et d'une sphère

1. Soit la sphère $(S):(x-1)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=62$ et le plan $(\pi):3x-7y+2z+100=0$. Prouver que le plan (π) est tangent à la sphère (S)
2. Calculer le rayon de la sphère de centre $\Omega(4;1;-5)$ qui est tangent au plan $(\pi): x+2y+2z=4$.
3. Soient la sphère $(S): x^2+y^2+z^2+6x-30y-4z+13=0$ et le point $T(7;4;4)$
   a) Vérifier que le point T appartient à la sphère.
   b) Écrire une équation cartésienne du plan tangente à la sphère (S) au point .
4. Soient la sphère $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y=159$ et le plan $(P):12x+4y-3z-12=0$

   Déterminer les équations des plans parallèles au plan (P) et tangent à la sphère (S).

   Soit la sphère $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ et le plan $(\pi):2x-2y-z+9=0$.

   a) Prouver que le plan (π) coupe la sphère.
   b) L'intersection de (π) et (P) est un cercle $(\boldsymbol{C})$ **;** déterminer son centre et son rayon.

Compétences

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES

Module 4 : CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DU PLAN

:

Chapitre 6 : **APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES**

Leçon 1 : Applications linéaires

Objectifs :

- Montrer qu'une application est linéaire.
- Déterminer les coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- Déterminer une équation, une base du noyau et de l'image d'une application linéaire.
- Reconnaitre un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme

Condensé de cours :

Soient E et F 2 $\mathbb{R}$_espaces vectoriels.

§ Une application $f: E \longrightarrow F$ est une **application linéaire** (ou morphisme ou homomorphisme) ssi

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
(2) $\forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$

Ou encore

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

§§ Une application linéaire de $E \longrightarrow E$ est un **endomorphisme**.

Un endomorphisme bijectif est un **automorphisme** et un morphisme bijectif est un **isomorphisme**.

§§§ Soient E et F 2 espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F.

- On appelle **noyau de f** noté ***$Kerf$***, l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E dont l'image est nulle par f.

$Kerf = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$

- On appelle **image de f** noté ***Imf*** le sous ensemble $f(E)$ de F, image de E par f.

$Imf = f(E) = \{\vec{v} \in F / \exists \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{v}\}$

Exercices :

Exercice 1 :

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \longmapsto (x, 2x)$ $\vec{u} \longmapsto g(\vec{u})$ / $g(\vec{u}) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\vec{\jmath}$ avec $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ 2 applications.

Montrer que f et g sont des applications linéaires.

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E avec $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. On considère l'application $f: E \longrightarrow F$ définie pour tout $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par $f(\vec{u}) = (x - 2y)\vec{\imath} + (3x + y)\vec{\jmath}$.

1- Montrer que f est un morphisme d'espaces vectoriels.
2- Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$.
3- $\left(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath})\right)$ est-elle une base de E ?

Exercice 3 :

E est un espace vectoriel dont une base est $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath} + 2\vec{\imath}) = \vec{0}_E$

1- Déterminer $Kerf$ et en donner une base.
2- Déterminer Imf et en donner une base.

Exercice 4 :

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{u}(x, y) \longmapsto \overrightarrow{u'}(x', y') / \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -4x + 2y \end{cases}$$

1- Déterminer et caractériser l'ensemble $E_1 = \{\vec{u}(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$
2- Déterminer et caractériser l'ensemble $E_2 = \{f(\vec{u}) / \vec{u}(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 5 :

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application $f: E \longrightarrow E$ qui a tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe $f(\vec{u}) = (2x - y)\vec{\imath} + (-4x + 2y)\vec{\jmath}$.

1- Montrer que f est un endomorphisme de E.
2- Déterminer $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$, et $f(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$.
3- Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{a}(-1; 2)$ par f.
4- Déterminer l'expression analytique de f.

Exercice 6 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E. f est l'application linéaire de E dans E, qui à tout vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe le vecteur $x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ tel que $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -4x - 8y \end{cases}$

1- Déterminer $Kerf$.
2- f est-elle bijective ?
3- a) Déterminer $f(\vec{\imath})$et $f(\vec{\jmath})$.
4- b) Montrer que $\left(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath})\right)$ n'est pas une base de E.

Leçon 2 : Matrices

Condensé de cours :

§ Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$ où a; b; c et d sont quatre réels. On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ le tableau noté $M_{(f;\mathcal{B})}$ ou M_f tel que $M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Une matrice est dite carrée si elle comporte autant de lignes que de colonnes. Dans ce cas, ce nombre de ligne est appelé ordre de la matrice.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

§§ Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices et k un réel. On a :

$A + B = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$; $kA = \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$

$detA = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $détA \neq 0$ et l'inverse A^{-1} de A est définie par $A^{-1} = \frac{1}{détA}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Exercices :

Exercice 1 :

Soit $\mathcal{B}(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base d'un espace vectoriel E et $f: E \longrightarrow E$ définie par $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ un endomorphisme de E.

Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 2 :

f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $f(\vec{\jmath}) = 5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ et $M_g = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Déterminer M_f.
2- Déterminer $g(\vec{\imath})$ et $g(\vec{\jmath})$.

Exercice 3 :

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de E, $\overrightarrow{e_1}(-1;2)$, $\overrightarrow{e_2}(1;-1)$ et $M_{(f;\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Vérifier que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
2- Ecrire $\vec{\imath}$ puis $\vec{\jmath}$ en fonction de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.
3- Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4 :

Calculer :

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

$4 \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$dét \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

Dans chacun des cas suivants, dire si la matrice A est inversible. Si oui, déterminer son inverse A^{-1}

1- $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
2- $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Le plan vectoriel $\mathcal{W}$ est muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On définit l'application f de $\mathcal{W}$ vers $\mathcal{W}$ par: $\forall \vec{w} \in \mathcal{W}, \vec{w} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}, f(\vec{w}) = (x - 2y)\vec{\imath} + (-x + 2y)\vec{\jmath}$

1- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{W}$.
2- Déterminer la matrice M de f dans la base B. f est-elle un automorphisme? Justifier votre réponse.
3- Déterminer :
   a) $Kerf$ et une base de $Kerf$.
   b) Imf et une base de Imf.
4- On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
   a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{W}$.
   b) Déterminer la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 7 :

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, g l'endomorphisme de E_2 qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ tel que $\overrightarrow{u'} = \left(kx + \frac{1}{2}y\right)\vec{\imath} + (-2kx - ky)\vec{\jmath}$ où k est un réel.

1- Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.
2- Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles g est un automorphisme.
3- Déterminer les valeurs de k pour lesquelles g est involutive $\left(g \circ g = Id_{E_2}\right)$.
4- Dans toute la suite, on pose $k = 1$.
   a) Déterminer le noyau $Kerg$ et l'image Img de g. On donnera une base pour chacun.
   b) En déduire que $Kerg = Img$.
   c) Soit $\vec{v}$ un vecteur de $Kerg$. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$.
   d) Soient $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées respectifs $(-1; 2)$ et $(-1; 1)$.
      i) Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base.
      ii) Donner la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 8 :

On considère un espace vectoriel E de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, f est l'endomorphisme de Edont la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $M_f = \begin{pmatrix} 4 & m \\ m & -4 \end{pmatrix}$ où m est un nombre réel. F est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f(\vec{u}) = 5\vec{u}$.

1- Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f est un automorphisme.

2- On suppose pour la suite que $m = 3$ et on pose $\overrightarrow{e_2} = 3\vec{\imath}$.
   a) Montrer que F est une droite vectorielle dont on precisera une base $\overrightarrow{e_1}$.
   b) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
   c) Ecrire la matrice M'_f de E dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exercice 9 :

Soit E le plan vectoriel rapporté à la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'endomorphisme f de E dans E tel que pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de E, on a $f(\vec{u}) = 3(x - 2y)(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

1- Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2- Trouver la matrice de $f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$.
3- Déterminer le noyau de f et en preciser une base.
4- Déterminer $f(E)$ et préciser une base de Imf.
5- Soient $\overrightarrow{e_1} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
   a) Justifier que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
   b) Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 10 :

E est un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et f l'endomorphisme de E défini par $\begin{cases} f(\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \\ f(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = -5\vec{\imath} \end{cases}$.

1- Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2- f est-il bijectif ? Si oui, déterminer la matrice de sa bijection réciproque f^{-1}.
3- Soit l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ tel que $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 2x - 6y \end{cases}$.
   Déterminer le noyau $Kerg$ et l'image Img de g. (On précisera une base $\overrightarrow{e_1}$ de $Kerg$ et une base $\overrightarrow{e_2}$ de Img.)
4- Déterminer l'expression analytique de $g \circ f$.

Exercice 11 :

Le plan vectoriel réel E est muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par φ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe le vecteur $\varphi(\vec{u}) = \left[\left(\sqrt{2}cost - 1\right)x + ycost\right]\vec{\imath} + \left[2xsint + \left(\sqrt{2}cost + 1\right)y\right]\vec{\jmath}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1- Donner la matrice M de φ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2- a) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles φ n'est pas bijectif.
   b) Représenter les valeurs trouvés sur le cercle trigonométrique.

Exercice 12 :

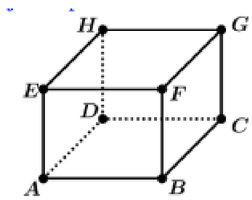
Le plan vectoriel $\mathcal{V}_2$ est muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$.

1- Montrer que $(\vec{u};\ \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$.
2- Déterminer les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u};\ \vec{v})$.
3- En déduire les coordonnées de $\vec{w} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ dans $(\vec{u};\ \vec{v})$.
4- Soit $\vec{L}$ le vecteur de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (a, b) dans la base $(\vec{u};\ \vec{v})$. Exprimer a et b en fonction de x et y.

MINESEC	GPM-Mai2020	Année scolaire 2019-2020
Cluster PC	TRAVAUX DIRIGES	Vecteurs de l'espace

Placer un point dans un repère de l'espace

EXERCICE 1 :

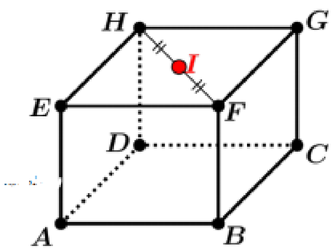


ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on considère les points $M(1; 1; \frac{3}{4})$, $N(0; \frac{1}{2}; 1)$, $P(1; 0; -\frac{1}{4})$.

1. Donner les coordonnées des points A, E et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
2. Placer M, N et P sur la figure.
3. Propose un autre repère de l'espace de ton choix et donne les coordonnées de chacun points A, B, C, D, E, F, G et H dans ton repère.

Points alignés dans l'espace

EXERCICE 2 :

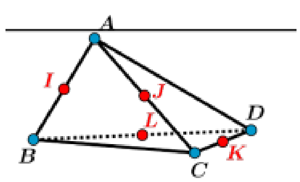


ABCDEFGH est un cube, I est le milieu du segment $[HF]$.
Le point M vérifie : $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MA}$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$
3. Déduire que les points E, M et C sont alignés

Droites parallèles dans l'espace

EXERCICE 3 :



ABCD est un tétraèdre, I est le milieu du segment $[AB]$.
E est le symétrique de D par rapport C.
F est un point tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DB}$

1. Démontrer par une méthode de votre choix que :
$\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{IC}$
2. Justifier que les droites (IC) et (EF) sont parallèles dans l'espace.

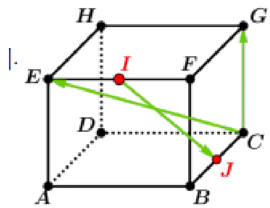
EXERCICE 4 :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(1; -1; 2)$, $B(3; 3; 8)$, $C(-3; 5; 4)$ et $D(a; b; 9)$.

1. A, B et C sont-ils alignés ?
2. Existe-t-il des réels a et b tels que les droites (AC) et (BD) sont parallèles ?

Vecteurs coplanaires

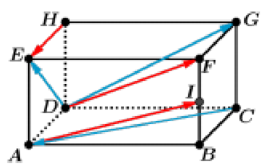
EXERCICE 5 :



ABCDEFGH est un cube I, J et T sont les milieux respectifs de $[EF]$, $[BC]$ et $[AC]$

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ET}$
2. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont-ils coplanaires ?

EXERCICE 6 :



ABCDEFGH est un pavé droit. I est le milieu de $[BF]$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

Points coplanaires

EXERCICE 7 :

L'espace est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(1; 2; 7)$, $B(-3; -2; 3)$, $C(0; 5; 22)$ et $D(4; 0; -10)$

Ces quatre points sont-ils coplanaires ? Justifier.

Calcul dans le repère Orthonormal

EXERCICE 8 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(2; 2; 0)$, $B(1; 3; \sqrt{2})$ et le vecteur $\overrightarrow{U}(-2; 0; -\sqrt{2})$

1. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$
2. Calculer la distance AB puis la norme du vecteur $\overrightarrow{U}$
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{U}$ sont-ils Orthogonaux ?

Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

EXERCICE 9 :

L'espace est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(2; 3; -1)$, et $B(1; -3; 2)$

1. Déterminer l'équation paramétrique de la droite (AB).
2. Déterminer l'équation du plan de repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$

Fossua .T .R ***(PLEG)***

RAPPELS :

VECTEURS DE L'ESPACE

I. Caractérisation vectorielle d'un plan

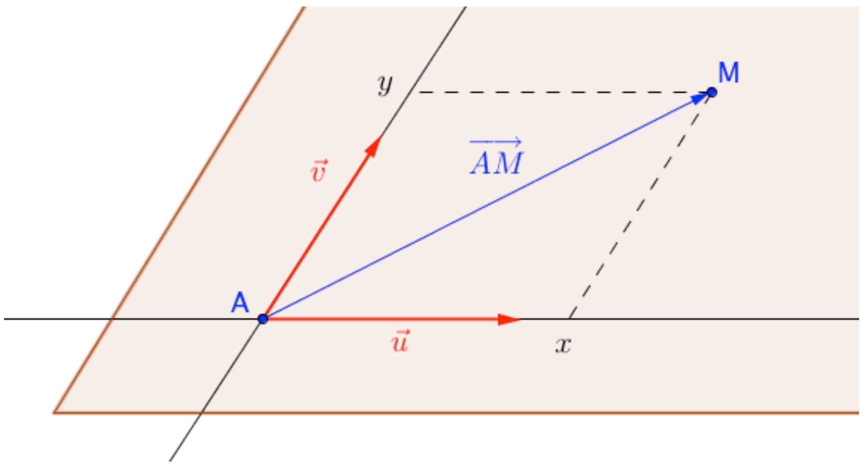
1) Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque :
Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : Relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, … restent valides.

2) Plan de l'espace

Propriété : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



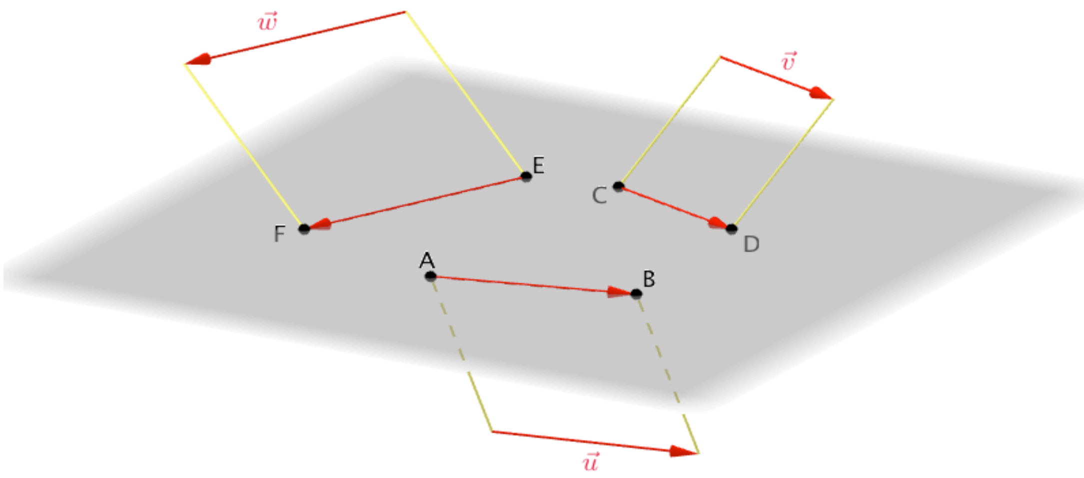
Remarque :
Dans ces conditions, le triplet $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère du plan.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

II. Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

1) Vecteurs coplanaires

Définition : Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

2) Repère de l'espace

Définition : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace.
On appelle repère de l'espace le quadruplet $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Remarques :
- O est appelé l'origine du repère.
- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M.
- De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.

III. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit une droite *d* passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Remarque :
Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite *d*.

FICHE DE TRA VAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES SUR LES SUITES NUMERIQUES EN PREMIERE C POUR LA RENTREE DU PREMIER JUIN 2020

Objectifs du chapitre

- Calculer les termes d'une suie numérique et les construire sur l'un des axes
- Etudier la monotonie et la convergence (par conjecture et calcul) d'une suite
- Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique et préciser sa raison
- Déterminer la relation entre deux termes quelconques d'une suite
- Déterminer l'expression du terme général d'une suite et calculer une somme finie
- Résoudre des problèmes concrets de la vie courante

QUELQUES RAPPELS

Définition 1 : Une suite réelle est une fonction de N dans $\mathbb{R}$.
Notation : u_n = lire "u indice n" = terme d'indice, ou de rang n = terme général de la suite u. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ = (u_n) = u = suite

Une suite peut être définie explicitement par une fonction (exemple $u_n = f(n)=n^2+2n+3$) , ou par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Définition 2 : Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** si, pour tout entier naturel n , on a : $U_n \leq U_{n+1}$. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si, pour tout entier naturel n , on a : $U_n \geq U_{n+1}$. Un suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Méthodes: - On peut comparer directement U_n et U_{n+1} grâce aux propriétés des inégalités.

- On peut étudier le signe de la différence U_{n+1} - U_n .

- Si la suite u est définie au moyen d'une fonction f par $U_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f.

- Si tous les termes de la suite u sont strictement positifs, on peut comparer à 1 le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

- Si la suite est définie par récurrence, on peut utiliser une démonstration par récurrence.

1. **Suites arithmético-géométriques** vérifiant : $\mathbf{u_{n+1} = a\, u_n + b}$

a. Pour l'exemple suivant, tracer dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormal , le chemin de la suite et observer la convergence : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$

b. Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, pour calculer le terme général de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on se ramène au cas de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - \alpha$ avec $\alpha = \frac{b}{1-a}$ une constante réelle telle que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

c. Si a = 1 : $\mathbf{u_{n+1} = u_n + b}$: cas d'une **suite arithmétique** où on obtient un terme en ajoutant au précédent une constante b appelée raison. Alors

$u_n = u_0 + n\,b$ ou $u_n = u_1 + (n-1)\,b$; $u_p = u_q + (p-q)b$

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

$$u_0+u_1+u_2+....+u_{n-1}+u_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

On peut aussi retenir : $$\text{Somme des termes}=\frac{\left(n^{bre}\text{ de termes}\right)\times\left(1^{er}\text{ terme}+\text{dernier terme}\right)}{2}$$

d. Si b = 0 : **$u_{n+1}= a\, u_n$** : cas d'une **suite géométrique** où on obtient un terme en multipliant le précédent par une constante a appelée raison. Alors $u_n = u_0\, a^n$ ou $u_n = u_1\, a^{n-1}$ ou $u_p = u_q\, a^{p-q}$

Somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$u_0+u_1+u_2+....+u_{n-1}+u_n=u_0\times\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\quad pour\ a\neq 1$$

On peut aussi retenir : $$\text{Somme des termes}=1^{er}\text{ terme}\times\frac{1-(raison)^{n^{bre}\text{ de termes}}}{1-raison}$$

<u>2. Convergence</u> : **<u>Définition 4 :</u>** Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et l un réel. On dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet (ou a) l pour limite , ou encore **converge** (ou tend) vers l , si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Une suite qui ne converge pas vers un réel est dite **divergente**.

<u>Théorème des gendarmes</u> : soit $(U_n; V_n; W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un triplet de suites telles que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l et vérifient , pour n assez grand , les relations $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l .

<u>Propriété</u> : Toute suite géométrique de raison q avec $|q| < 1$, converge vers 0 .

II - Convergence

1. **<u>Théorème de limite de composée:</u>** (Admis)

a) Lorsque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l , si la fonction f est continue en l , alors la suite $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f (l) .

b) Lorsque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L , si $\lim_{x\to L} f(x) = +\infty$, alors la suite $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

c) Lorsque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, alors la suite $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L et si $+\infty$ alors $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

<u>Propriétés</u> (admises) :
Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.
Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.

I. <u>EXERCICES D'INITIATION OU D'APPROPRIATION</u>

<u>EXERCICE 1 :</u>
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n=-n^2+2n$ et $v_n=u_{n+1}-u_n$ pour tout n appartenant à N

1. Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n
4. Exprimer v_{n+1} en fonction de n
5 . En déduire que $v_{n+1} - v_n = -2$ pour tout entier naturel n

EXERCICE 2 :
Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

1. $u_n = n^2$
2. $u_n = 3n-5$
3. $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$
4. $u_n = -\dfrac{2}{n+4}$
5. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
6. $u_n = \dfrac{5^n}{n}$

EXERCICE 3 :
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{n^2+1}{2n^2}$
1. Etudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Montrer que pour tout entier naturel n ≥ 1 ; on a $u_n \leq 1$

EXERCICE 4 :
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{2n-1}{n+1}$
1. Etudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Montrer que pour tout entier naturel n ; on a : $-1 \leq U_n \leq 2$
4. A partir de quel entier n, tous les termes de la suite sont-ils compris entre 1,5 et 2 ? Justifier votre réponse

EXERCICE 5 :
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{2^n}{n^2}$
1. Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4
2. La suite (U_n) est-elle monotone ?
3. Résoudre l'inéquation $n^2-2n-1 \geq 0$ dans IN.
4. Quel est le sens de variations de (U_n) à partir du rang 3
5. Déterminer un entier $n \geq n_0$ tel que $U_n \geq 10^{50}$

EXERCICE 6 :

I. Dire si les propositions suivantes sont **vraies, fausses** ou si l'on ne peut rien dire. On justifiera sa réponse
1. Toute suite convergente est bornée
2. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$
3. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ est strictement croissante

II. **Choisir la ou les bonnes réponses parmi les propositions suivantes**.
On justifiera sa réponse
1. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout entier naturel n $|U_n - 1| \leq \frac{n}{n^2+1}$

a) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

b) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1
c) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

2. La suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1+(-1)^n\sin(n)}{n+1}$ vérifie $|V_n| \leq \frac{2}{n+1}$. Elle est :

a) Décroissante b) Bornée c) Convergente

EXERCICE 7 :

Dans chacun des cas suivants, et pour tout entier naturel n déterminer si (U_n) est arithmétique ou non.

1. $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = -u_n + 2$
2. $u_0 = -7$ et $u_{n+1} = u_n - 5$
3. $u_n = \frac{7}{2}n - 3$
4. $u_n = n^2 + 7n$

EXERCICE 8 :

1.On considère la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = 653$ et la raison $r = -\frac{3}{2}$.

Calculer $U_0 + U_1 + \cdots + U_{871}$

2. On considère une suite arithmétique (U_n) telle que $U_3 = 7$ et $U_7 = 19$ Calculer U_0 et la raison r

EXERCICE 9 :

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$. On sait que $U_5 = 125$ et $U_{16} = 48$.

1. Calculer la raison et le premier terme de cette suite
2. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
3. Pour quelle valeur de n a-t-on $U_n = -127$
4. A partir de quel rang a-t-on $U_n \leq -250$
5. Calculer la somme $S = U_{1789} + U_{1790} + \cdots + U_{2020}$

EXERCICES DE SYNTHESE ET DE RECHERCHE

EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 7$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{2U_n+6}{5}$.

1) Calculer : U_1, U_2. (0,5pt)
2) On pose $V_n = U_n - 2$

a) Montrer que V_n est géométrique.
b) Ecrire V_n puis U_n en fonction de n.
c) Calculer : $S_n = U_1 + V_1 + U_2 + V_2 + \cdots + U_n + V_n$.

EXERCICE 2

On considère deux suites numériques (U_n) et (V_n) définies par : $\begin{cases} U_0 = 4000 \\ \forall n \in IN^*,\ U_n = 0{,}7U_{n-1} + 300 \end{cases}$

et $V_n = U_{n+1} - U_n$

1) Calculer U_1 et U_2
2) a) Démontrer que (V_n) est une progression géométrique dont on caractérisera

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Etudier la convergence des suites (U_n) et (V_n)

3) Une observation de vente d'un journal a montré que chaque année, on compte 70% de réabonnement et 3000 nouveaux abonnés. Combien d'abonnés ce journal comptera –t-il au bout de 10 ans ?

EXERCICE 3 On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{-u_n-2}{u_n+1} \end{cases}$.

1) Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de cette suite.
2) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 et en-déduire sans justification des expressions de u_{2n} *et* u_{2n+1} en fonction de n.
3) Monter que (u_n) est bornée.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par $v_n = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{2n}+u_{2n-1} = \sum_{p=0}^{2n-1} u_p$.

4) Calculer v_1, v_2 *et* v_3.
5) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{-1}{2}$.
6) Exprimer v_n *en* fonction de n.
7) Donner le sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,et étudier sa convergence .

EXERCICE 4 **Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J)**

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2 \end{cases}$ et $V_n = U_n + a$; a étant un réel

1) Construire sur l`axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (U_n)
2) Justifier que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
3) Déterminer a pour que (V_n) soit géométrique de raison 0,5

Dans la suite on prendra a= -4

4) Exprimer V_n *puis* U_n en fonction de n
5) La suite (U_n) est-elle convergente
6) On pose S=$U_0 + U_1 + \cdots..+U_{11}$ *et* $T = V_0 + V_1 + \cdots + V_{11}$

Calculer T et montrer que S=46+ $\frac{1}{2^{11}}$

EXERCICE 5

Le président de l'association « Bafia Football Club » constate que chaque année, l'association garde 75% de ses adhérents et qu'il y a 800 nouveaux adhérents qui s'inscrivent. On suppose que l'évolution du nombre d'adhérents reste le même au fil des années. Au démarrage de l'association en 2019, il y avait 1600 adhérents.

1) Quel est le nombre d'adhérents en 2020? en 2021?

2) On appelle U_n le nombre d'adhérents au bout de (2019 + n).
Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n
3) On pose pour tout entier naturel n, $V_n = 3200 - U_n$
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison
b) Calculer V_n et U_n en fonction de n
c) Etudier la convergence de la suite (U_n)
d) Quel sera le nombre d'adhérents de l'association en 2025 ?

EXERCICE 6

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$; $\begin{cases} \boldsymbol{U_o = -1} \\ \boldsymbol{U_{n+1} = \frac{3U_n + 4}{U_n + 3}} \end{cases}$

I – Soit h la fonction définie sur]-3, + ∞[par $\boldsymbol{h(x) = \frac{3x+4}{x+3}}$, on note (Ch) la courbe représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

1 – Donner le sens de variation de h et construire (Ch)

2 – Représenter les quatre premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.

3 – Conjecturer les sens de variation et la convergence de la suite (U_n)
II – Soit (V_n) la suite définie par $\boldsymbol{V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}}$ pour tout entier naturel n

1 – a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

b) En déduire le sens de variation de (V_n)

2 – Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3 – Etudier la convergence de (U_n).

4 – On pose $S_n = V_2 + V_3 + \ldots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

EXERCICE 7

Un objet qui chute parcourt approximativement 4,9 mètres durant la première seconde, pendant la deuxième seconde, il parcourt 9,8 mètres de plus que pendant la première seconde, pendant la troisième seconde, il parcourt 9,8 mètres de plus que pendant la deuxième seconde, etc. : à chaque seconde, la distance parcourue est supérieure de 9,8 mètres à celle parcourue pendant la seconde précédente. On note d_1 la distance parcourue pendant la première seconde, d_2 celle parcourue pendant la deuxième seconde, etc.

a) Calculer d_1, d_2, d_3
b) Quelle est la nature de la suite (d_n) pour tout entier naturel n
c) Quelle distance parcourt l'objet pendant la huitième seconde ?
d) Quelle est la distance totale parcourue pendant ces huit secondes ?

EXERCICE 8

La règle d'un jeu est la suivante : On mise une somme S qui est l'enjeu. Quand on gagne, on reçoit le double de l'enjeu. Jean-Jacques mise 2frs au premier jeu et il perd. Il mise alors 4frs au second jeu et il perd. Il continue à doubler sa mise jusqu'à sa première partie gagnante qui est la 110ème . Depuis le début du jeu, A-t-il perdu ou gagné ?

TRAVAUX DIRIGES DE TRIGONOMÉTRIE

Exercice 1

1.définir : cercle trigonométrique puis dessiner un cercle trigonométrique (C) de centre O d'unité est $4cm$.

2. Déterminer les mesures principales des angles orientés de mesures $\frac{79\pi}{4}$ et $\frac{1850\pi}{6}$

3. a) Sur un cercle trigonométrique (C) que vous avez dessiné placer les points A et B, images respectives de $\frac{79\pi}{4}$ et de $\frac{1850\pi}{6}$

b) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.

c) Calculer le sinus et le cosinus de $\frac{79\pi}{4}$.

4. Sachant que $x \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$ et $\sin x = \frac{3}{5}$ alors :

(a) $Cosx = \frac{2}{5}$ (b) $cosx = -\frac{4}{5}$ (c) cosx $=\frac{4}{5}$ (d) $cosx = -\frac{2}{5}$ (e) $cosx = -\frac{3}{5}$

5.Donner la condition sur α, β et γ pour que les equations suivantes admettent des solutions.

(e_1): $\sin x = \alpha$; (e_2): $\cos x = \beta$; (e_3): $\tan x = \beta$: (e_4): $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$

Exercice 2

On considère l'équation (E) : $sin\ 3x = -sin2x$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'intervalle]- π , π] , puis représenter ses solutions sur un cercle trigonométrique. (indications :$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; si $\sin\beta = \sin\theta$ $alors$ $\beta = \theta + 2k\pi$ ou $\beta = \pi - \theta + 2k\pi$)

2. a. Démontrer que $sin\ 3x = sinx\ (4cos^2x - 1)$. (on pourra utiliser les formules d'addiction et le fait que $3x = x + 2x$)

b. En déduire que l'équation (E) est équivalente à $sinx\ (4cos^2x + 2cosx - 1) = 0$.

c.Parmi les solutions trouvées pour (E), lesquelles sont aussi solutions de l'équation :

$4cos^2x + 2cosx - 1 = 0$?

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $4t^2 + 2t - 1 = 0$.

b. En déduire les valeurs exactes de cos $\frac{2\pi}{5}$ et cos$\frac{4\pi}{5}$.

4. Soit θ un nombre réel.

(i) Développer $(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2$.

(ii) En déduire que $cos^4\theta + sin^4\theta = \frac{1}{4}(1 + cos^2 2\theta)$. (Indications :$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$)

(iii) Résoudre dans] $-\pi$, π] [l'équation : $cos^4\theta + sin^4\theta = \frac{5}{8}$.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $cosx\ sinx\ cos2x\ cos\ 4x\ cos\ 8x = \frac{1}{16} sin16x$

2. En déduire que $cos\frac{\pi}{32}\ sin\frac{\pi}{32}\ cos\frac{\pi}{16}\ cos\ \frac{\pi}{8}\ cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$

3. On considère la fonction polynôme p définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

(a) Calculer $p(-1)$; en déduire que $p(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

(b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2sin^3x + 5sin^2x + sinx - 2 = 0$

Exercice 4

(a) Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

(b) Résoudre dans R², le système suivant : $\begin{cases} a + b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ ab = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

(c) En déduire dans $]\,0\,;\frac{\pi}{2}[\, \times \,]\,0\,;\frac{\pi}{2}[$ les solutions du systèmes d'inconnues $(x; y)$ suivant :

$$\begin{cases} 2sinx + 2siny = \sqrt{3} - 1 \\ sinx\ siny = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

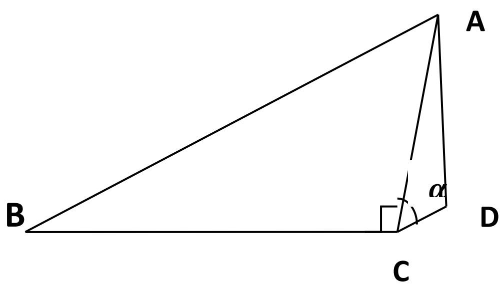
Exercice 5

1. **Résoudre dans IR l'équation : $4x^2 - 2x - 1 = 0$.**
   Pour toute la suite, on pose x=cos $\frac{\pi}{5}$ et y = sin $\frac{\pi}{5}$.
2. **Exprimer sin $\frac{2\pi}{5}$ en fonction de x et y.**
3. **a) justifier que cos$\frac{2\pi}{5}$ = 1 – 2y² = 2x² -1.**
   b) en déduire que sin$\frac{3\pi}{5}$ = y (4x² - 1).

4 .a) justifier que sin$\frac{2\pi}{5}$ = sin$\frac{3\pi}{5}$.
b) en déduire que : 4x²-2x-1 = 0.
c) déduire alors que cos $\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et sin $\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice 6

Dans le plan orienté, on considère le quadrilatère direct ABCD ci-contre tel que mes$\widehat{ACB}$=mes$\widehat{CDA}$=$\frac{\pi}{2}$; mes $\widehat{CAB}$=mes$\widehat{ACD}$=α avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ AB =2$\sqrt{3}$ +2 ; AC=2$\sqrt{3} - 2$ et BC +CD= 4$\sqrt{2}$



1. i) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}})$
ii) Peut-on avoir les points A, B, C et D cocycliques ?

2.i) Justifier que α vérifie la relation ($\sqrt{3}$ -1)cosα +($\sqrt{3}$ +1)sin$\alpha = 2\sqrt{2}$

ii) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donner les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$

iii) Déterminer la valeur exacte de α.

3. Soit h l'homothétie qui transforme B en C et A en D.

i) Exprimer AB et CD en fonction de AC et en déduire le rapport de h.

ii) En déduire que le point C est barycentre des points D, B et A affectés des coefficients 1; $\cos^2\frac{\pi}{12}$ et -$\cos^2\frac{\pi}{12}$

Exercice7

1) **Exprimer $sinxcosx$ en fonction $sin2x$.**
2) **Ecrire : $\cos x - \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $acos(x+b)$.**
3) **En déduire que $\frac{1}{\sin x} - \frac{\sqrt{3}}{\cos x} = \frac{4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x}$.**
4) **Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{1}{\sin x} - \frac{\sqrt{3}}{\cos x} = 4$; puis placer les points solutions sur le cercle trigonométrique $\left(\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)\right)$.**
5) **a) Vérifier que $\sqrt{3+3\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$.**

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2t^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

   c) Déduire de la question précédente la résolution dans $]-\pi, \pi[$de l'équation $2\sin^2 x + \left(1-\sqrt{2}\right)\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Exercice 8

Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé directe (O, I, J). (C) désigne le cercle de centre O et de rayon 1. On note $I(1,0)$; $J(0,1)$ et $K(-1,0)$ A est le milieu du segment $[OK]$. (C') désigne le cercle de centre A passant par J.

1. **a) Écrire une équation cartésienne de (C').**

   (C') rencontre l'axe des abscisses en deux points dont l'un, noté B et a une ordonnée x_B positive.

   b) Déterminer x_B
2. **On désigne par C le milieu du segment $[OB]$, la perpendiculaire en C à l'axe des abscisses coupe le cercle (C) en deux points dont l'un, noté M, a une ordonnée positive. On pose $\alpha = \left(\widehat{\imath, \overrightarrow{OM}}\right)$.**

   a) Démontrer que $cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   b) En déduire $sin\alpha, cos2\alpha$ et $cos3\alpha$.
3. **a) Résoudre dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $cos2x = cos3x$.**

   c) En déduire la valeur exacte de α.

Exercice 9

1.En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2.Pour tout réel x, on pose $A(x) = 1 + 2cosxsinx - 2cos^2x$.

a) Détermine deux réels a et b tels que $A(x) = acosx + bsinx$

b) Montrer que pour tout réel x, $A(x) = -\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$ l'équation $A(x) = 1$

3. On considère l'expression $A = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}sinxcosx - 1$

a) Montrer que A=$-\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$

b) Déterminer les réels P et Q tels que A = Pcos($2x + Q$)

c) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi[$ l'équation $A = 1$

4. a) Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $-\sin^2 x - (2+\sqrt{2})\sin x + 2\sqrt{2} + 1 = 0.$

(On pourra remarquer que $6 - 4\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})^2$)

b) Représenter les points images des solutions de cette équations sur le cercle trigonométrique

5.a) Exprimer $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan x$ et $\tan y$

b) Déduire $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$ penser au cas de $\tan 3x$ au future

c) Déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$

6. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi[$ l'inéquation : $\sin x\,(1 - 2\cos x) < 0$

Exercice 10

1.Résoudre graphiquement les inéquations suivantes (la solution de chaque inéquation aura droit à un cercle trigonométrique

$(I_1)\colon \sin 2x \leq 1$; $(I_2)\colon \cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $(I_3)\colon \tan x < 1$; $(I_4)\colon \cos 3x < 0$

2.