I.A FATICK//LYCEE COLOBANE **ANNEE SCOLAIRE : 2019-2020**
CELLULE DE MATHEMATIQUES **CLASSES : TS2**

SERIE D'EXERCICES SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1 : Soit (U_n) une suite définie par : $\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n+4}{U_n+3} \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs de U_0 pour lesquelles (U_n) est constante.
2. On pose $U_0 = -5$ et (V_n) la suite de terme général $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. Déterminer U_n en fonction de n puis en déduire la limite de U_n en $+\infty$.
3. Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ puis en déduire sa limite en $+\infty$

Exercice 2 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^* / U_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
2. Calculer en fonction de n la somme S_n des n premiers termes de cette suite.
3. Calculer la limite de la suite (S_n).

Exercice 3 : (U_n) est la suite numérique définie par : $U_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n+1} - 2 \leq U_n$.
3. Etudier la limite de la suite (U_n).

Exercice 4 : Soit (U_n) une suite définie par : $\begin{cases} U_1 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(U_n + \dfrac{3}{U_n}\Big) \end{cases}$

1. Déterminer U_2, U_3
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3}{2} \leq U_n \leq 2$
3. Montrer que si (U_n) converge, sa limite est $\sqrt{3}$.
4. Soit (T_n) définie sur $\mathbb{N}^* - \{1\}$ par $T_n = U_n - \sqrt{3}$
   (a) Montrer que $U_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{(U_n - \sqrt{3})^2}{2U_n}$ pour tout entier non nul n et différent de 1
   (b) En déduire que $U_n \geq \sqrt{3}$ pour tout entier naturel n non nul et différent de 1
   (c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\},\ 0 \leq T_n \leq \dfrac{1}{2}$
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$,
   $0 \leq T_{n+1} \leq \dfrac{1}{6} T_n$ puis $0 \leq T_n \leq \Big(\dfrac{1}{6}\Big)^{n-1} T_1$.
   En déduire la limite de (T_n) et (U_n)

Exercice 5 : Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0, +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in]0,6; 0,7[$
2. Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
3. Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq 1$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |U_n - \alpha|$
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $|U_n - \alpha| \leq (\frac{\sqrt{2}}{4})^n |U_0 - \alpha|$ puis (U_n) converge vers $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$

Exercice 6 :
On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\begin{cases} u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4v_n}{6}, n \in \mathbb{N}^* \\ v_1 = 8, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 5v_n}{6}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Soit $a_n = v_n - u_n$ pour tout entier naturel n non nul.
   (a) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer a_n en fonction de n
2. (a) Démontrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

(b) Démontrer que (u_n) est majorée et (v_n) minorée.

(c) En déduire que (u_n) et (v_n) ont une limite commune.

3. Soit $w_n = \frac{1}{4}u_n + v_n$ pour tout entier n non nul. Montrer que (w_n) est une suite constante. En déduire les limites de (u_n) et (v_n).

Exercice 7 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{2+2U_n}{2+U_n} \end{cases}$$

1. Construire la courbe représentative (C) de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+2}{x+2}$ dans l'intervalle $]-2;+\infty[$ aisi que la droite (D) d'équation $y = x$.
2. En déduire une construction des 4 premiers termes de cette suite sur l'axe (OI).

Exercice 8 : u et v sont les suites numériques définies par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n-1} = \dfrac{1}{3}u_n - n - \dfrac{4}{3} \quad (n \geq 1) \end{cases}$ et $\forall n,\ v_n = u_n + an + b$, où a et b sont des nombres réels.

1. Déterminer les nombres réels a et b sachant que la suite (V_n) est géométrique.
   En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
2. On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n \quad (n \in \mathbb{N})$;
   $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad (n \in \mathbb{N})$.
   Calculer S_n et T_n en fonction de n.

Exercice 9 : On définit les complexes Z_n de la manière suivante $Z_0 = 1$ et pour tout entier n strictement positif $Z_{n+1} = \dfrac{1}{3}Z_n + \dfrac{2}{3}i$.

1. On pose, pour tout entier n, $U_n = Z_n - i$
   (a) Calculer U_{n+1} en fonction de U_n.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = (1-i)(\dfrac{1}{3})^n$.
2. (a) Exprimer, en fonction de n, la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de U_n.
   (b) On note A_n le point du plan d'affixe U_n et B_n le point d'affixe Z_n.
   - Calculer le module et un argument de U_n.
   - Montrer que les points A_n sont alignés.
   - Montrer que les points B_n sont alignés.

Exercice 10 : Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}, \quad \forall n \leq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $u_1; u_2; \ldots; u_6$.
2. Construire dans un même repère la droite d'équation $y = x$ et la courbe C de f définie par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
   Utiliser ces deux courbes pour représenter les premiers termes de la suite (u_n).
3. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $]0;+\infty[$ une solution l.
4. Démontrer par récurrence que $\forall n$ entier naturel, $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
5. Montrer que sur l'intervalle $[\dfrac{3}{2};2]$ on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$.
6. A l'aide des trois questions précédentes, et en utilisant le théoreme des inégalités des accroissements finis :
   (a) Montrer que $|f(u_n) - f(l)| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - l|$.
   (b) En déduire que pour tout n,
   $|u_{n+1} - l| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - l|$ puis
   $|u_n - l| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - l|$.
   (c) En déduire alors que (u_n) converge vers l.

Exercice 11 : Soit le complexe $a = -1 - i$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par :
$$\begin{cases} z_0 = 0 \text{ et } z_1 = i \\ z_{n+1} = (1-a)z_n + az_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Déterminer z_2 et z_3 sous forme algébrique.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = z_{n+1} - z_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Déterminer u_0 et u_1 sous forme algébrique.
   (b) Démontrer que (u_n) est géométrique de raison $-a$.
   (c) Exprimer u_n en fonction de n et de a.
3. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de z_n. En déduire que $z_n = -1 + (1+i)^n$
4. Déterminer le module et un argument de a.