Suite définie par une intégrale

Terminale C

PAR GILDAS MBA OBIANG

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

2. Préciser alors la limite de la suite (I_n).

3. a) Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.

   b) Calculer I_1 puis I_5

Résolution

1. La fonction $f : x \longmapsto e^{x^2}$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et particulier sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 2xe^{x^2} \geqslant 0$. Par suite, f est strictement croissante sur $[0;1]$.
   On en déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in [0;1], & f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \\ \forall x \in [0;1], & 1 \leqslant e^{x^2} \leqslant e \end{array}$$

   Or, $\forall x \in [0;1]$, $x^n \geqslant 0$ donc $x^n \leqslant x^n e^{x^2} \leqslant e x^n$. En vertu de la positivité de l'intégrale on a :

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^1 x^n dx \leqslant \quad I_n \leqslant \quad \int_0^1 e x^n dx \\ \Downarrow \\ \displaystyle\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \quad e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ \Downarrow \\ \displaystyle\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1} \end{array}$$

2. On a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$. Par suite, en vertu du théorème sur la comparaison de suite, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

3. a) Soit n un entier naturel.

On a : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$. Posons $u(x) = e^{x^2} \Longrightarrow u'(x) = 2xe^{x^2}$ et $v'(x) = x^n \Longrightarrow v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, il en résulte que :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}e^{x^2}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 x^{n+2}e^{x^2}dx \\ I_n &= \frac{e}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2} \end{aligned}$$

Donc : $I_{n+2} = \frac{n+1}{2}\left(\frac{e}{n+1} - I_n\right)$ c'est-à-dire : $I_{n+2} = \frac{e}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$.

b)$I_1 = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$.

On a $I_3 = = \frac{e}{2} - I_1 = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $I_5 = \frac{e}{2} - 2I_3 = \frac{e}{2} - 1 = \frac{e-2}{2}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^n dt$.

1. Calculer I_0 , I_1.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée. Conclure.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel supérieur ou égale à 2 :

$$I_n = \frac{n}{n-1}I_{n-2}$$

b) En déduire que pour tout n, $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}I_n$.
c) En déduire que $(n+2)I_{n+1}I_{n+2}$ est indépendant de n, quel que soit n puis déterminer sa valeur.

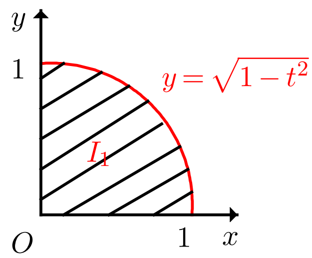
Résolution

1. $I_0 = \int_0^1 dt = [x]_0^1 = 1$.

Nous allons calculer I_1 à par deux méthodes.

Méthode 1

$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$. La fonction f: $t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$ étant positive sur $[0;1]$, alors I_1 est l'aire du plan délimité par le graphe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = 0$ et $t = 1$.

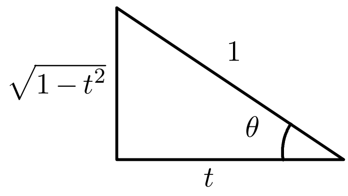


Par conséquent I_1 est l'aire du quart du disque de centre $O(0;0)$ et de raison 1.

Il s'ensuit que : $I_1 = \frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Méthode 2

Considérons le triangle rectangle de coté 1, t et $\sqrt{1-t^2}$ suivant :



On a : $\sqrt{1-t^2} = \sin\theta$ et $\cos\theta = t$. On a $dt = -\sin\theta d\theta$.

$t = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ et $t = 1 \Longleftrightarrow \theta = 0$. Il s'ensuit par la propriété du changement de variable que :

$$I_1 \; = \; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. Soit n un entier naturel. On a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-t^2} - 1\right)\left(\sqrt{1-t^2}\right)^n dt$.

   Or, $\forall t \in [0;1]$, $\sqrt{1-t^2} \leqslant 1$ et $\left(\sqrt{1-t^2}\right)^n \geqslant 0$. Donc $\left(\sqrt{1-t^2} - 1\right)\left(\sqrt{1-t^2}\right)^n \leqslant 0$, par suite en vertu de la positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. D'où, la suite (I_n) est strictement décroissante.

   Comme, $\forall t \in [0\,;1]$, $\left(\sqrt{1-t^2}\right)^n \geqslant 0$, alors $I_n \geqslant 0$. Il s'ensuit que (I_n) est suite décroissante et minorée par 0, par conséquent (I_n) converge.

3. En posant $\cos x = t$, $\sqrt{1-t^2} = \sin x$. On a $dt = -\sin x\, dx$.

   Donc $t = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ et $t = 1 \Longleftrightarrow x = 0$. Il s'ensuit par la propriété du changement de variable que :

$$I_n \; = \; \int_0^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\, dx$$

   Pour tout $n \geqslant 2$, on en :

   $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin^{n-1} x\, dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x\, dx$.

   Posons $u(x) = \cos x \Longrightarrow u'(x) = -\sin x$;

   et $v'(x) = \cos x \sin^{n-1} x \Longrightarrow v(x) = \frac{1}{n}\sin^n x$. Or, à l'aide d'une intégration par partie on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n+1} x\, dx \; = \; \left[-\frac{\cos x}{n}\sin^n x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} I_n$$

Donc $I_n = I_{n_{-2}} + \frac{1}{n} I_n$ c'est-à-dire $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$. En déduit que pour tout entier naturel : $I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n$.

b) Soit n un entier naturel. On a :

$$(n+3) I_{n+1} I_{n+2} = (n+3) I_{n+1} \times \frac{n+2}{n+3} I_n = (n+2) I_{n+1} I_n$$

c) On en déduit que la suite $[(n+2) I_{n+1} I_n]$ est constante.

Par suite pour tout entier naturel n, $(n+2) I_{n+1} I_n = (0+2) I_{0+1} I_0 = 2 I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2(n+2)}$$

Fin