TRAVAUX DIRIGES TLE D

PROBLEME DE SYNTHESE

Exercice 1 : a) Résoudre dans C l'équation $z^3-(2-i)z^2+(5-3i)z-2+6i=0$. Sachant que l'une des racines est imaginaire pur.

Soit z_1 cette solution, on trouvera les deux autres solutions z_2 et z_3 où z_2 a une partie imaginaire négative.

b) Soit A d'affixe z_1, B d'affixe z_2, C d'affixe z_3 et Ω d'affixe 1

On définit la similitude directe telle que $S(A)=\Omega$ et $S(B)=C$

Déterminer son centre son rapport et une mesure de son angle.

Exercice 2 :

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2-2z+2=0$ soient K, L, M les points d'affixes respectives $k=1+i$, $l=1-i$ et $m=-i\sqrt{3}$

   Le plan est muni d'un repère (o,i,j)
2) N est le symétrique de M par rapport à L. Vérifier que l'affixe n du point N est $2+i(\sqrt{3}-2)$
3) La rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C.

   Déterminer les affixes a et c des points A et C
4) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$, transforme le point M en le point D et le point N en le point B. Détermine les affixes d et b des points D et B.
5) Montrer que le point K d'affixe k est milieu des segments [DB] et [AC].

   Montrer que $\frac{c-k}{b-k}=i$. En déduire la nature du quadrilatère (ABCD)

Exercice 3 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

Soit r la transformation du plan qui a tout point $M'\binom{x'}{y'}$ tel que $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$

1)a) Détermine l'écriture complexe de r.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de r.

2) Soit h la transformation du plan d'écriture complexe $z'=2z-i$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de ..

3) On pose $s=hor$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s

b) Déterminer l'écriture complexe de s

c) Déterminer l'expression analytique de s

4)a) Soit le cercle de centre A et de rayon 4 avec $z_{A=1-i}$

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle C' image de C par S.

MAMAX

Exercice 4: Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

1)a) Résoudre dans C l'équation $z^2-4z+8=0$

b) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique

2)a) soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives

$z_{A=2+2i}$ $z_{B=2-2i}$ et $z_{C=4}$ placer ces points dans le plan.

b) Calculer le rapport $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ et en déduire la nature du triangle CAB puis celle du quadrilatère AOBC

3) Soit f la similitude directe plane complexe qui laisse le point C invariant et qui transforme le point A en O

a) donner l'écriture complexe de f

b) donner les éléments caractéristiques de f

Soit g la transformation de p dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'/ $z'=(1-i)z+4i$

c) Ecrire sous forme algébrique l'affixe de G' image du barycentre G des points pondérés $(A;3)$ $(B;2)$ et $(C;-3)$ par g

Exercice 5 : On considère l'application t de C dans C définie par :

$$t(z)=9z^4-24z^3+50z^2-24z+41$$

1) Montrer que si z_0 est une racine de t, alors $\bar{z}_0$ est aussi racine de t
2) Vérifier que i est une racine de t et en déduire une autre racine de t
3) Déterminer trois complexes a, b et c tels que $\forall_{z \in C}$

$t_{(z)}=(z^2+1)(az^2+bz+c)$

4) Résoudre dans C l'équation $t(z)=0$
5) Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(o,\vec{u},\vec{v})$ unité : 3cm.

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes $z_{A=-i}$, $z_{B=i}$; $z_{C=}\frac{4}{3}+\frac{5}{3}i$ et $z_D=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}i$

a) placer les points A, B, C et D

4

b) Montrer que $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\in i\mathbb{R}$ et $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}\in i\mathbb{R}$

c) En déduire la nature exacte des triangles ACD et CBD montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6 : a) Déduire sous forme exponentielle les solutions de l'équation $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$ dans C

b) A l'aide des racines cubiques de l'unité écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3) Déduire de ce qui précède les valeurs de $cos\frac{11\pi}{12}$ et $sin\frac{11\pi}{12}$