Etude d'une Conique

Groupe enseigner les maths

PAR GILDAS MBA OBIANG

Exercice 1

Déterminer une équation cartésienne réduite des coniques suivantes :

- ellipse de foyers $F(2,0)$ et $F'(-2,0)$ et de directrices $D : x=3$ et $x=-3$.
- hyperbole de foyers $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$ et d'excentricité 2.
- ellipse d'excentricité $\dfrac{1}{3}$ et de paramètre $p=1$.
- hyperbole d'asymptotes D :
  $y=\dfrac{1}{2}x$ et $D' : y=-\dfrac{1}{2}x$, de sommet $A\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ et $A'\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$

Résolution

• Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'ellipse de foyers $F(2,0)$ et $F'(-2,0)$ et de directrices $D : x=3$ et $x=-3$ a pour équation :

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$$

• Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, hyperbole de foyers $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$ et d'excentricité 2 a pour équation :

$$x^2-\frac{y^2}{3}=\frac{1}{4}$$

• Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, ellipse d'excentricité $\dfrac{1}{3}$ et de paramètre $p=1$ a pour équation :

$$x^2+\frac{3y^2}{2}=\frac{9}{4}$$

• Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'hyperbole d'asymptotes D :
$y=\dfrac{1}{2}x$ et $D' : y=-\dfrac{1}{2}x$, de sommet $A\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ et $A'\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$ a pour équation :

$$\frac{9x^2}{4}-\frac{16y^2}{9}=1$$

Exercice 2

Démontrer les propriétés suivantes des paraboles(on prendra la parabole $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé fixé). On note M un point de la parabole distinct du sommet, et H son projeté orthogonal sur la directrice.

1. La tangente à la parabole en M coupe sa tangente au sommet au milieu du segment [FH].

2. Deux tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires se coupent sur la directrice.

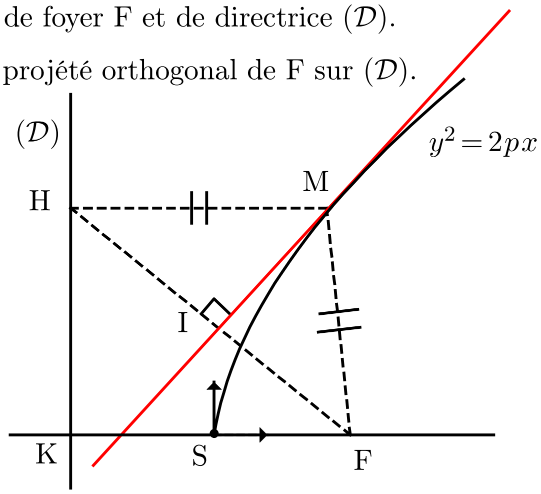
3. Les droites horizontales se réfléchissent sur la parabole en droites passant par son foyer (par réflexion, on entend que la normale à la parabole au point d'intersection de la droite incidente et de la parabole est bissectrice de la droite incidente et de la droite réfléchie).

Solution

Dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ $(\mathcal{P})$ a pour équation $y^2 = 2px$.

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{D})$.



1. Montrons que la tangente à la parabole en M coupe sa tangente au sommet au milieu du segment [FH].

   Démonstration.
   Soit $(\mathcal{T})$ la tangente à la parabole $(\mathcal{P})$ au point $M(x_0; y_0)$.
   Comme $M \in (\mathcal{P})$ alors $\text{MH} = \text{MF}$. Par suite le triangle MHF est isocèle en M.
   D'une part le vecteur $\overrightarrow{\text{HF}}$ a pour coordonnées dans le repère orthogonal $(S, \vec{i}, \vec{j})$:
   $$\overrightarrow{\text{HF}}\begin{pmatrix} p \\ -y_0 \end{pmatrix}$$
   D'autre part $\vec{u}\begin{pmatrix} y_0 \\ p \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{T})$.
   Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} y_0 \\ p \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{HF}}\begin{pmatrix} p \\ -y_0 \end{pmatrix}$ étant orthogonaux, il s'ensuit que $(\mathcal{T})$ est perpendiculaire à la droite (HF). Or, le triangle MHF est isocèle en M donc $(\mathcal{T})$ est médiatrice du segment [FH].
   Soit $(\mathcal{T}')$ la tangente en S.

Alors $(\mathcal{T}')$ est parallèle à la droite (HK), ainsi, son équation est : $x=0$.

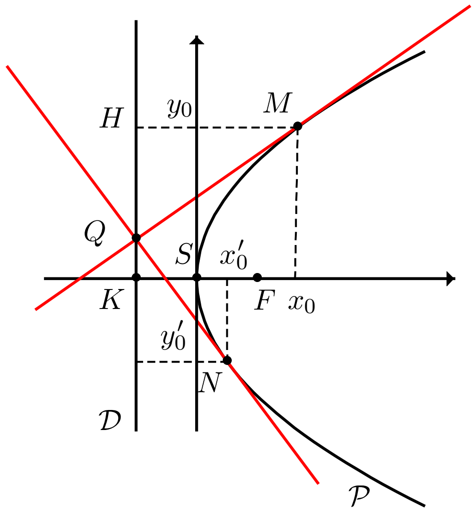
Or, $I\begin{pmatrix} \dfrac{x_H+x_F}{2} \\ \dfrac{y_H+y_F}{2} \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $I\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{y_0}{2} \end{pmatrix}$ par suite $(\mathcal{T})\cap(\mathcal{T}')=\{I\}$.

$\square$

2. Deux tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires se coupent sur la directrice.

Démonstration.
Soit $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point du plan.

Soient $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ deux tangentes à $\mathcal{P}$ respectivement en $M(x_0;y_0)$ et $N(x_0';y_0')$ et perpendiculaires en $Q\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$.



Les droites $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ ont pour équations respectives :

$$y=\frac{p}{y_0}(x+x_0) \quad \text{et} \quad y=\frac{p}{y_0'}(x+x_0')$$

Donc $\dfrac{p}{y_0}\times\dfrac{p}{y_0'}=-1$ c'est-à-dire $y_0'=-\dfrac{p^2}{y_0}$.

Par suite les coordonnées de Q sont définies par le système :

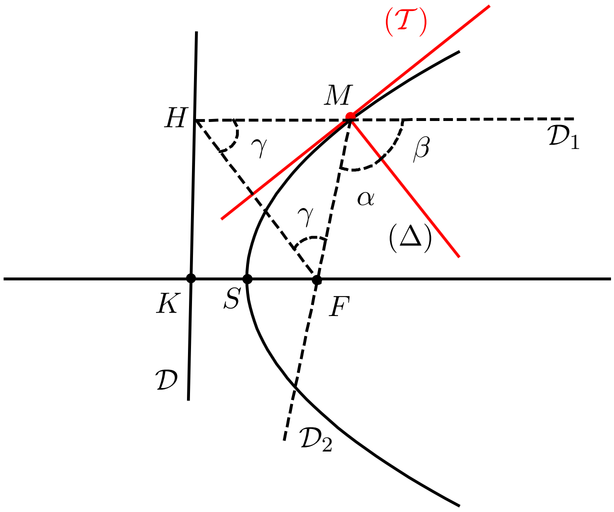
$$\begin{cases} px_Q-y_Qy_0=-px_0 \\ px_Q-y_Qy_0'=-px_0' \end{cases} \text{avec } y_0'=-\frac{p^2}{y_0}$$

d'où $x_Q=\dfrac{px_0y_0'-px_0'y_0}{-py_0'+py_0}=\dfrac{x_0y_0'-x_0'y_0}{-y_0'+y_0}$. Or, $x_0y_0'-x_0'y_0=\frac{y_0y_0'}{2p}(y_0-y_0')$.

Donc $x_Q=\dfrac{\frac{y_0y_0'}{2p}(y_0-y_0')}{-y_0'+y_0}=\dfrac{y_0y_0'}{2p}=-\dfrac{p^2}{2p}=-\dfrac{p}{2}$. par suite $Q\in\mathcal{D}$.

$\square$

3. Les droites horizontales se réfléchissent sur la parabole en droites passant par son foyer (par réflexion, on entend que la normale à la parabole au point d'intersection de la droite incidente et de la parabole est bissectrice de la droite incidente et de la droite réfléchie).

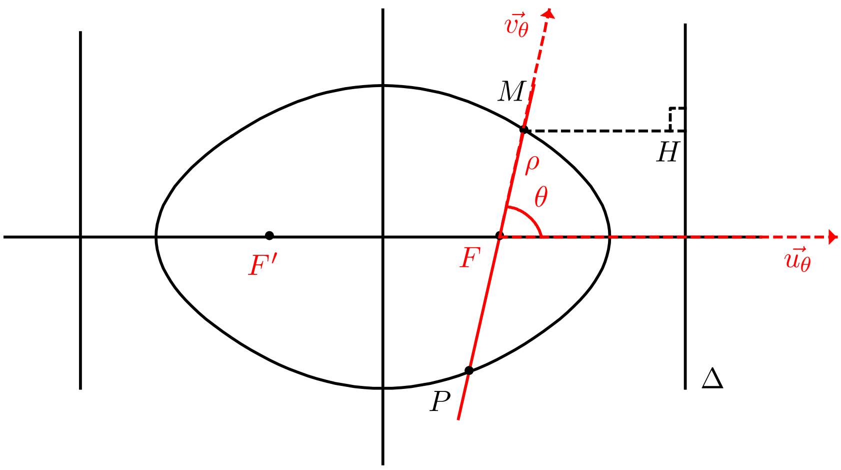


Soit M le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite d'ncidence $\mathcal{D}_1$. Notons par H son projeté sur la directrice $\mathcal{D}$.
Les triangles MHF est isocèle d'après la question 2. Ainsi, en vertu des propriétés sur les angles alternes-internes et angles correspondants on établi immédiatement que (Δ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMM'}$.

Exercice 3

On considère une ellipse de foyers F et F' et $\mathcal{D}$ une droite passant par F et coupant l'ellipse en deux points M et P. Montrer que la quantité $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FP}$ est indépendante du choix de la droite $\mathcal{D}$, et déterminer le minimum de $\dfrac{1}{FM^2}+\dfrac{1}{FP^2}$ quand la droite varie.

Démonstration.



Posons $d(F,\Delta)=d$.

Soit $\theta=\widehat{(\vec{u_\theta},\vec{v_\theta})}$. Dans le repère polaire d'origine $(F,\vec{u_\theta},\vec{v_\theta})$ On a : $MF=\rho$.

Or, $d(M,\Delta)=d-\rho\cos\theta$, donc $e\,(d-\rho\cos\theta)=\rho$ c'est-à-dire $\rho=\dfrac{ed}{1+e\cos\theta}$.

Ainsi, $M(\rho,\theta)$. Par définition on a :

$$FM=\frac{ed}{1+e\cos\theta}$$

Donc par suite : $\dfrac{1}{FM}=\dfrac{1+e\cos\theta}{ed}$.

Dans ce même repère, on a : $P(\rho',\pi-\theta)$. Donc $FP=\dfrac{ed}{1-e\cos\theta}$. Par suite :

$$\frac{1}{FP}=\frac{1-e\cos\theta}{ed}$$

Par conséquent : $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FP}=\dfrac{2}{ed}$.

Ainsi, $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FP}$ est constant et ne dépend pas du choix de $\mathcal{D}$.

Posons $f(\theta)=\dfrac{1}{FM^2}+\dfrac{1}{FP^2}=\left(\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FP}\right)^2-\dfrac{2}{FM\times FP}=\dfrac{1}{e^2d^2}-\dfrac{2(1-e^2\cos^2\theta)}{e^2d^2}$.

c'est-à-dire que $f:\theta\longmapsto\dfrac{2}{e^2d^2}+\dfrac{2\cos^2\theta}{d^2}$ avec $\theta\in[0;\pi]$.

On a : $\forall\theta\in[0;2\pi],\ f'(\theta)=-\dfrac{2\sin 2\theta}{d^2}$. Ainsi, $f'(\theta)=0\Longleftrightarrow\theta\in\left\{0;\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		$-$	0	$+$	
f	$f(0)$		$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$		$f(\pi)$

D'après les variations de f on en déduit que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est minimum de f par conséquent

la quantité $\dfrac{1}{FM^2}+\dfrac{1}{FP^2}$ est minimale si et seulement $\theta=\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au grand axe autrement lorsque $\mathcal{D}$ est parallèle à la directrice Δ. $\square$