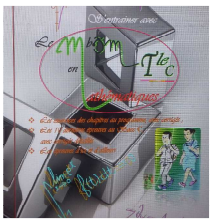
**Enseignements secondaires**
**e-Learning mathématiques**
**Tel : 695 95 81 81**



**Année Scolaire 2020-2021**
**Classe : Tle C**
**Durée : 2h**

***Les exercices 2 et 3 sont au choix.***

**EXERCICE 1:**

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in N^*$, $\prod_{k=1}^{n}(6k-3) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)$. **1pt**
2. Démontrez que $\forall a, b \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ **1pt**
3. On note, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.
   **a)** Montrer que : $2^{2^n} \equiv -1[F_n]$. **0,5pt**
   **b)** Montrer que : $2^{2^{2^n}} = \left(2^{2^n}\right)^{2^{2^n - n}}$ **0,25pt**
   **c)** En déduire que $F_n$ divise $2^{F_n} - 2$. **0,75pt**

**EXERCICE 2:**

**1.** Répondre par « **vrai** » ou « **faux** » aux affirmations **(a)**, **(b)**, **(c)** et **(d)**. **0,5pt×4**.

Soit $f$ la fonction définie par : $f(z) = \frac{z}{z-1+\bar{z}}$.

**(a)** La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{0,5\}$.

**(b)** On a : $f \circ f(z) = \frac{1}{f(z)}$.

**(c)** $f(i) = -i$.

**(d)** Il existe un unique z tel que $f(z) = z$.

**2.** On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2.$$

**a)** Démontrer que si $z_0$ est racine de P(z), alors $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont aussi racines de P(z). **1pt**

**b)** Vérifier que 1+i est racine de P(z). **0,5pt**

**c)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0. **1pt**

**3.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit la transformation qui au point M d'affixe z=x+iy, fait correspondre le point M' d'affixe z'=x'+iy', définie par : z'=$\frac{z-3}{z-2i}$ $(z \neq 2i)$

**a)** Calculer x' et y' en fonction de x et y. **1pt**

**b)** Déterminer :

**(i)** L'ensemble $(\Gamma_1)$ des points M tels que z' soit réel. **0,5pt**

**(ii)** L'ensemble $(\Gamma_2)$ des points M tels que z' soit imaginaire pur. **0,5pt**

**EXERCICE 3:**

1. Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_O \in [0,1]$ et la relation $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour tout entier $n$.
   **a)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$. **1pt**
   **b)** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. **1pt**
   **c)** On pose $u_0 = cos\theta$, où $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que $u_n = cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ **1,5pt**
   **d)** Etudier la limite de la suite $(u_n)$. **1pt**
2. Pour tout $n \geq 1$, on considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
   **a)** Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} - v_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$. **1,5pt**
   **b)** En déduire la limite de la suite $(v_n)$. **1pt**