

EVALUATION DE FIN DU 1^{ER} TRIMESTRE



EXERCICE 1 : 5 Points

On considère l'application P de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par : $P(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

1. Montrer que si z_0 est une racine de P , alors \bar{z}_0 est aussi une racine de P . **0,5pt**
2. Vérifier que i est une racine de P et en déduire une autre racine de P . **0,5pt**
3. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que :
pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$. **0,75pt**
4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$. **1pt**
5. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Unité graphique : 3cm.

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -i$,

$$z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i \text{ et } z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$$

- a) Placer les points A, B, C et D dans le repère. **0,5pt**
- b) Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs. **0,5pt**
- c) En déduire la nature exacte de chacun des triangles ACD et CBD . **0,5pt**
- d) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. **0,75pt**

EXERCICE 2 : 04 Points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S) . **0,5pt**
2. (\mathcal{P}) est le plan d'équation $2x - 2y - z + 9 = 0$.
 - a) Montrer que (S) et (\mathcal{P}) sont sécants. **0,75pt**
 - b) Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de Ω sur (\mathcal{P}) . **1,25pt**
3. (\mathcal{C}) est le cercle d'intersection du plan (\mathcal{P}) et de la sphère (S) .
Déterminer le centre et le rayon r de (\mathcal{C}) . **0,5pt**
4. a) Montrer que le point $A(3; 8; 1)$ appartient à la sphère (S) . **0,25pt**
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (π) tangent à (S) au point A . **0,75pt**

PROBLEME : 11 Points

Le problème comporte 3 parties dépendantes A, B et C.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 2cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire



Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Dresser le tableau de variations de g . 1pt
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]2; 3[$ puis déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près. 1pt
3. Etudier le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} . 0,5pt

Partie B : Etude de la fonction f .

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. 1pt
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$. En déduire le tableau de variations de f . 1,5pt
3. **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, $f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$. 0,5pt
b) En déduire que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote oblique \mathcal{D} en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5pt
c) Etudier la position relative de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D} . 0,5pt
4. Tracer la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} . 1,5pt

Partie C : Nombre de solutions d'une équation

1. Déterminer les abscisses des points de la courbe \mathcal{C} où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$. 0,5pt
2. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter. 1,5pt
3. En déduire graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$. 1pt