

MINESEC	 	Année scolaire 2019-2020
Complexe Scolaire Adventiste d'Odza		Classe : T <sup>le</sup> C
DEPARTEMENT DE MATHS		Durée: 3h00min Coef : 7

EVALUATION N° 1

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES**

**Exercice 1 / 5 points**

- Démontrer par récurrence que :
  - Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $2^{6n-5} + 3^{2n}$  est un multiple de 11. /0,75 pt
  - Pour tout entier naturel  $n$ ,  $5^n \geq 1 + 4n$ . /0,75 pt
  - Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ . /0,75 pt
  - Pour tout entier naturel non nul  $n$  supérieur ou égal à 2,  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ . /0,75 pt
- Soit  $(u_n)$  la suite de terme général  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - Calculer  $u_3$  et  $u_4$ . /0,25 pt x 2
  - Démontrer que pour tout naturel entier  $k \geq 2$ , on a :  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ . /0,5 pt
  - Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ . En-déduire que la suite  $(u_n)$  est bornée. /0,75 pt + 0,25 pt

**Exercice 2 / 5 points**

- On considère le nombre complexe  $a = -\sqrt{3} + i$ 
  - Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de  $a$ . /0,75 pt
  - Déterminer sous forme trigonométrique les racines carrées de  $a$ . /0,75 pt
  - En utilisant les questions 1 a. et 1 b., déterminer les valeurs exactes de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$ . /0,5 pt
- On pose :  $Z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$  ;  $X = z + z^2 + z^4$  et  $Y = z^3 + z^5 + z^6$ . On admet que pour tout nombre complexe  $q$  ;  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ , Pour tout entier naturel  $n$ 
  - Vérifier que  $e^{i(\pi+x)} = -e^{ix}$ . /0,25 pt
  - Montrer que  $X$  et  $Y$  sont conjugués. /0,75 pt
  - Montrer que  $X + Y = -1$  et  $XY = 2$ . /0,5 pt + 0,75 pt
  - Trouver les valeurs exactes de  $X$  et  $Y$ . On admet que  $\text{Im}(X) > 0$ . / 0,75 pt

**Exercice 3 / 5 points**

- I- On considère le polynôme  $P$  défini par :  $P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$ .
- Démontrer par l'absurde que 0 n'est pas une racine de  $P$ . /0,25 pt
  - Montrer que si  $z_0$  est une racine de  $P$ , alors  $\overline{z_0}$  est racine de  $P$ . /0,5 pt
  - Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$ ,  $P(z) = z^2 \left[ \left( z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left( z - \frac{1}{z} \right) + b \right]$ . /0,5 pt
  - Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^2 + aZ + b = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont les réels trouvés en 2. /0,5 pt
  - a. Calculer  $(\sqrt{3} + i)^2$  et  $(\sqrt{3} - i)^2$ . /0,25 pt x 2

b. En-déduire toutes les racines de  $P$ . On pourra effectuer le changement de variable  $Z = z - \frac{1}{z}$ . /1 pt

6. Ecrire  $P$  comme produit de deux polynômes de degré 2 chacun et à coefficients réels. /0,75 pt

II-

1. Déterminer et caractériser l'ensemble des points d'affixes  $z$  telles que :  $|z - 1 + 2i| = 2$ . /0,5 pt

2. Soit  $(C)$  le cercle de centre  $I$  d'affixe  $z_I$  et de rayon  $r, r > 0$ . Démontrer que tout point  $M$  de  $(C)$  a pour affixe  $z$  telle que  $z = z_I + re^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]-\pi ; \pi]$ . /0,5 pt

### **Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES**

Monsieur HYPO, grand commerçant au marché de BAZOU, possède une somme de 2 000 000 F CFA au 1<sup>er</sup> janvier 2020. Il souhaite faire un placement jusqu'au 1<sup>er</sup> janvier 2050. Trois possibilités s'offrent à lui :

**Possibilité 1** : placer cette somme dans une banque à un taux annuel de 10 % et à intérêts composés.

**Possibilité 2** : placer cette somme dans une autre banque ce montant à un taux annuel simple de 8 %.

**Possibilité 3** : épargner cette somme dans une réunion à un taux annuel composé de 5 % et cotiser annuellement la somme de 100 000 F CFA à ajouter à son capital.

**Tâches :**

1. Quelle somme disposera monsieur HYPO s'il choisit la **possibilité 1** ? /1,5 pt

2. Quelle somme disposera monsieur HYPO s'il choisit la **possibilité 2** ? /1,5 pt

3. Quelle somme disposera monsieur HYPO s'il choisit la **possibilité 3** ? /1,5 pt

**Présentation : 0,5 pt**