GROUPE CAUCHY SCHWARZ

EXAMINATEUR : **NZOUEKEU MBITKEU PATRICE**

Fiche de travaux dirigés en classe de terminale D

Exercice : 1

On rapporte le plan à $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormal direct.

1. C est l'ensemble des nombres complexes. On considère sur C l'équation

(E) : $z^3+4z^2+2z-28=0$.

a. Montrer que (E) admet une solution réelle.

b. Résoudre dans C l'équation (E).

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $z^2-4=4-\overline{z}^2$.

a. M étant un point du plan d'affixe z=x+iy, montrer que M$\in$ H si x^2-y^2=4.

b. Soit A, B et C les points d'affixe respectives 2, $-3-i\sqrt{5}$, $-3+i\sqrt{5}$.

Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

a. Calculer les images les affixes de A', B' et C' images respectives de A, B et C par la rotation r.(on donnera les affixes sous forme algébrique).

b. On note par M' (z'=x'+iy') l'image de M(z=x+iy) par r. (H') l'image de (H) par r.

- Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
- Montrer que M' appartient à (H') si x'y'=-2. puis vérifier que A', B' et C' appartiennent à (H').

4. Vérifier que $y'=-\dfrac{2}{x'}$; puis déterminer la nature de (H').

Exercice :2

1- Ecrire sous la forme trigonométrique le complexe *1+ i*

2- On pose :

$z=\rho e^{i\theta}$ avec $\rho\in\,]0;+\infty[$ et $\theta\in[0;2\pi[$

a- Calculer z² et $(1+i)\overline{z}$ en fonction de ρ et θ $\left(\overline{z}\text{ } \textit{désignant le} \text{ complexe conjugué de z}\right)$.

b- En déduire la valeur r de ρ pour laquelle on a : $z^2=(1+i)\overline{z}$ (1)

c- Déterminer les valeurs θ_0, θ_1 et θ_2 de θ telles que $z = re^{i\theta}$ vérifie l'égalité (1).. On note respectivement z_0, z_1 et z_2 les nombres complexes de modules r et d'argument θ_0, θ_1 et θ_2.

2- Soit A_1 et A_2 les points d affixes respectives $z_1 - z_0$ et $z_2 - z_0$ dans le plan complexe, et 0 le point d'affixe nulle. L'objectif de cette question est de mettre le nombre complexe $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$, sous forme trigonométrique.

a) Montrer, à l'aide de la relation (1), que $(1+i)\left(\overline{z_2 - z_0}\right) = z_2{}^2 - z^2{}_0 = 2\sqrt{3}e^{i\pi}$ et $(1+i)\left(\overline{z_1 - z_0}\right) = z^2{}_1 - z^2{}_0 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

b) Déduire de 2.a) les arguments des complexes $z_2 - z_0$ et $z_1 - z_0$.

En déduire que le triangle OA_1A_2.

Exercice 2

Dans le plan complexe P rapporte au repère orthogonal direct $(o;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, soit les points A, I et B d affixes respectives 1, 2 et 3. Soit P le plan P prive de I et f l application de P dans P qui a tout point M d affixe z associe le plan $M = f(M)$ d affixe ; $z = \frac{1}{z-2} + 2$

1. Déterminer les points M de P' vérifiant : $f(M) = M$

2. Calculer, en fonction de z, ; les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM}'$.

En déduire une relation entre IM' et IM, puis une relation entre les angles ($\vec{e}_1,\overrightarrow{IM}$ ') et ($\vec{e}_1,\overrightarrow{IM}$).

Placer les points M_0 d' affixe $z_0 = 2 + 2^{i\frac{\pi}{3}}$ dans le repère, puis le point M'_0 en utilisant ce qui précède.

3. On suppose que M est point de plan P' différent de A et de B.

Calculer $z'-1$ et $z'-3$ en fonction de z. vérifier que : $\frac{1-z'}{3-z'} = -\frac{1-z}{3-z}$ en déduire une relation entre $\frac{M'A}{M'B}$ et $\frac{MA}{MB}$, puis une relation entre les angles $(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A})$ et $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})$.

Démontrer que si M appartient la médiatrice de [AB], il en est de même pour M'.

Exercice : 3

Le plan est rapporté au repère orthonormé directe $(O;\vec{u},\vec{v})$; unité 2cm. On appelle A et B les points du plan d'affixe respectives a=1 et b=-1.

On considère l'application f qui, à tout point M différent de B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\frac{z-1}{z+1}$.

1. Résoudre dans C l'équation $z=\frac{z-1}{z+1}$.

En déduire les points M tels que : f(M)=M.

2. Montrer que (z'-1)(z+1)=-2. En déduire que AM'x BM=2.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient à un cercle (C') de centre A et de rayon à préciser.

4. Soit P le point d'affixe $p=-2+i\sqrt{2}$

a) Ecrire p+1 sous la forme exponentielle.

b) Montrer que $P\in$ (C).

c) Soient Q le point d'affixe $q=\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.

Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.

<u>Exercice</u> :4

On considère les nombres complexes $z_1=3(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $z_2=3(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

1.a) Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes z_1,

z_2 et $z=\frac{z_1}{z_2}$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, z^{12n}.

2.a) Donner la forme algébrique de $z=\frac{z_1}{z_2}$.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3. On considère dans IR l'équation d'inconnue t : $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos t+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin t=2\sqrt{2}$. Résoudre cette équation dans $]-\pi,\pi]$.

<u>Exercice</u> : 5

Pour tout complexe $z\neq 1$, on pose

$z=\frac{z-1}{z-1}$, et on appelle A,B M et M' les points d'affixes 1, -1, z et z' dans un repère orthonormé $(o;\vec{u},\vec{v})$.

1-a) Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$. En déduire $|z'|$.

b) traduire géométriquement ce résultat pour point M'.

2- Calculer en fonction de z et $\bar{z}$ le complexe.

$r=\frac{z'+1}{z-1}$; en déduire que r est réel.

3-Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ sont colinéaires

4- utiliser ce qui précède pour donner une construction géométrique de M' connaissant M. On fera une figure.

Exercice : 5

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^4-4z^2+16$ et on considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : P(z) = o.

1. Montrer qu'il existe un réel a, et le déterminer tel que : $P(z)=(z^2+az+4)(z^2-az+4)$.

2. Résoudre l'équation (E). on notera z_1, la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives. Vérifier que les solutions $z_1,-z_1,\overline{z_1}$ et $-\overline{z_1}$. ($\overline{z_1}$désigne le conjugué de z_1).

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(o;\vec{u};\vec{v})$ (unité : 4 cm). Placer les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives $z_1, 2i, -\overline{z_1}, -z_1, -2i$ et $\overline{z_1}$.

Montrer que ces points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2, et qu'ils forment un hexagone régulier.

Exercice : 6

L'équation suivante, d'inconnue z∈ C.

(E) : $z^3-(5+i)z^2+(9+4i)z-5-5i=0$

possède trois solutions z_1, z_2 et z_3 vérifiant $z_1=\overline{z_2}$.

1. Former une équation admettant comme solution z_1, z_2 et z_3.

2. En déduire les solutions de (E)(on pourra poser $z_1=x_1+iy_1$, $z_3=x_3+iy_3$)

3. Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient A, B et c les points du plan d'affixes respectives $2+i$, $1+i$ et $2-i$.

Démontrer qu'il existe une similitude S qui rend A en B et B en C. On précisera les éléments caractéristiques de S.

Exercice 7 Soit s la similitude directe d'écriture complexe : $z' = (1+i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s.

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|(1-i)z+2-i| = 4$.

3. Retrouver le résultat de la question précédente par une méthode algébrique.

Exercice : 8

1.Pour tout nombre complexe Z , on pose P(Z)= Z^3 -3Z^2 +3Z+7.

a)calculer P(-1).

b)Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe Z, on ait :

P(Z)=(Z+1)(Z^2+aZ+b).

c)Résoudre dans C l'équation P(Z)=0. 2.Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique :2cm).

On désigne par A , B , C et G les points du plan d'affixes respectives Z_A = -1 , Z_B=2 + i$\sqrt{3}$, Z_C=2- i$\sqrt{3}$ et Z_G= 3.

a)Réaliser une figure et placer les points A, B,C,et G.

b)Calculer les distances AB ,BC ,et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

c)Calculer un argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ .En déduire la nature du triangle GAC.

Exercice :9

Soit le plan P rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère la transformation T de P dans P, qui au point M(x,y) fait correspondre le point M'(x',y') tel que : $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y+\sqrt{3} \end{cases}$.

Le point M a pour affixe le complexe z et point M' z'.

a) Exprimer z' en fonction de z.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de T.

2. Soit maintenant la transformation S, qui au point M d'affixe z_1 associe le point M_1 d'affixe z tel que : $z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z.$

Reconnaître la transformation S et préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit maintenant la transformation S0T qui, au point M(x,y) d'affixe z associe le point $M_2(x_2,y_2)$ d'affixe z_2.

a) Exprimer z_2 en fonction de z, puis x_2 et y_2 en fonction de x et y. quelle est l'image par S0T de $C\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

b) Soit D la droite dont une équation est : $x + y\sqrt{3} + 2 = 0.$

Montrer que C appartient à D.

Si D' est l'image de D par S0T, quel est le point d'intersection de D et D' ?

Exercice :10

On se propose de résoudre dans C l'équation (E) : $6z^4 - 5z^3 + 13z^2 - 5z + 6 = 0.$

a) Vérifier que 0 n'est pas solution de cette équation.

b) Démontrer que les systèmes suivants sont équivalents : $(S_1)\begin{cases}(E)\\ u = z + \frac{1}{z}\end{cases}$ et $(S_2)\begin{cases}6u^2 - 5u + 1 = 0\\ u = z + \frac{1}{z}\end{cases}$.

c) Résoudre le système (S_2). En déduire les solutions de (E).

Exercice :11

Déterminer l'écriture complexe de la transformation considérée :

a) L'homothétie de rapport -$\frac{1}{2}$ et de centre V d'affixe i ;

b) la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre J d'affixe -2+i ;

c) la symétrie centrale de centre K d'affixe -4 ;

d) la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe -5+2i ;

e) la similitude de centre A d'affixe i de rapport 2 et d'angle 60°.

Exercice :12

T est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de T.

2. C est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 2$.

a) Déterminer et construire C

b) Déterminer et construire l'image de C par T.

3. Δ est l'ensemble des points M, d'affixe z tels que : $|z-1| = \left|z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|$.

a) Déterminer et construire Δ.

b) Déterminer et construire l'image de Δ par T.

Exercice : 13

I. Soit Z un complexe.

On considère dans C l'équation : $z^2-(2+i\omega)+i\omega+2-\omega=0$ (1)

1. Démontrer qu'il existe un nombre complexe ω pour lequel l'équation (1) admet deux solutions conjuguées.

2. Calculer alors ces solutions.

II. Le plan complexe est muni d'un repère $(o,\vec{u},\vec{v})$ orthonormal direct (unité graphique : 4cm).

B et M_1 sont les points d'affixes respectives :

i et $z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$.

1. Calculer le module et un argument de z_1.

2. M_2 est le point d'affixe z_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Trouver le module et un argument de z_2.

Déduisez-en que le point M_2 est sur la droite (d) d'équation y = x

3. M_3 est le point, d'affixe z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $2+\sqrt{3}$

a. vérifier que $z_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$

b. Démontrer que les points M_1 et M_3 sont sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$

4. Construire à la règle et au compas, les point M_1, M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; préciser les différentes étapes de la construction.

5. A tout point M, distinct de B d'affixe z, on associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = \frac{1}{i-z}$

Trouver, puis représenter, l'ensemble E des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et rayon n.

Exercice 14 :

A) soit $P(z)=3z^3+(-5\sqrt{3}+10i)z^2+(5-15i\sqrt{3})z+24i$

1- calculer P(-3i) et en déduire la solution $z_1$de l'équation P(z) = 0

2- Déterminer a, b et c nombre complexes non nuls tels que pour tout complexe z, $P(z)=(z+3i)(az^2+bz+c)$

3- Résoudre l'équation P(z) = 0 (on notera z_2 et z_3 les autres racines de cette équation. La partie imaginaire de z_2 étant négative).

4- Calculer le module et l'argument de z_1, z_2 et z_3.

5- Démontrons que z_1, z_2 et z_3 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

B) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $M_1(0,-3), M_2(\sqrt{3},-1)$ et $M_3(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})$

1- Déterminer le réel m pour que le point G d'affixe i le barycentre du système $M_1(m)$, $M_2(-2)$ et $M_3(3)$

2- Déterminer la similitude plane directe S telle que $S(M_1) = M_2$ et $S(M_2) = M_3$.

Préciser les éléments caractéristiques de S.

3- Quel est le transformé de G par la similitude de S.