**Ministère des Enseignements Secondaires**
**GROUPE « AGIR COMPETENT »**
**Sis à L'ECOLE PUBLIQUE DE SONGMINKOUGUI EDEA**
Tel : 697 26 38 45 / 682 80 90 67
***Responsable : T. N . AWONO MESSI***

**Année scolaire : 2019-2020**
**Epreuve : Mathématiques**
**Durée : 3h 15h00-18h00**
**Mercredi, 18 septembre 2019**

# FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 2 : CLASSE DE T$^{le}$ C

## EXERCICE 1

1. Déterminer trois entiers naturels $a, b$ et $c$ tels que : $\frac{59}{3^2} = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{3^2}$ avec $0 \leq b < 3$ et $0 \leq c < 3$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $n$ tels que $n-1$ divise $n+10$.

## EXERCICE 2

1. Démontrer qu'il n'existe pas d'entiers relatifs $a$ et $b$ tels que $26a - 54b = 2019$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs tels que $2n+5$ divise $3n+4$.
3. Dans le division euclidienne de $1512$ par un entier naturel non nul $b$, le quotient est $17$ et le reste $r$. Déterminer les valeurs possibles pour $b$ et $r$.

## EXERCICE 3

1. Un entier naturel $x$ s'écrit $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ dans la numération décimale.
   Démontrer que $6$ divise $x$ si et seulement si, $6$ divise $4(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1) + a_0$.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On pose $a = 6k - 2$ et $b = 4k + 3$.
   **(a)** Montrer que si $\delta$ divise $a$ et $b$, alors $\delta$ divise $13$.
   **(b)** Quelles sont les valeurs possibles de $13$?

## EXERCICE 4

1. Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division de $2^n$ par $5$.
2. En déduire le reste de la division par $5$ de $1357^{2019}$.

## EXERCICE 6

1. Etudier les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
2. Démontrer que la fonction $h : x \mapsto \tan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

## EXERCICE 7

Soit $f$ la fonction définie sur $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Etudier les variations de $f$.
2. Montrer que $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.
3. Montrer que pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}$.
4. Etudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}$ de $f$.

## EXERCICE 8

1. Montrer que dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$ n'a pas de solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x+3)^2 \equiv 1[4]$.

**EXERCICE 9**

1. **(a)** Justifier que $a \equiv b[n]$ si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = qn + b$.

   **(b)** A quelle condition peut-on dire que $b$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $n$.

2. Justifier que le chiffre des unités d'un entier naturel $N$ est le reste dans la division euclidienne de $N$ par $10$.

3. Déterminer le chiffre des unités de $\left(7^7\right)^7$.

4. On souhaite déterminer le chiffre des unités de $2^n + 3^n$ selon les valeurs de $n$.

   **(a)** Déterminer le chiffre des unités de $3^{2012}$.

   **(b)** Déterminer le reste de $2^{2012}$ dans la division par $5$. En déduire son chiffre des unités.

   **(c)** Quel est alors le chiffre des unités de $2^{2012} + 3^{2012}$ ?

   **(d)** Déterminer les restes possibles de $2^n + 3^n$ en fonction de $n$.

   **(e)** En étudiant la parité de $2^n + 3^n$, donner son chiffre des unités en fonction de $n$.

   **(f)** En déduire le chiffre des unités de $2^{2019} + 3^{2019}$.

**EXERCICE 10**

1. Un nombre $N$ s'écrit $\overline{abc0}$ en base $5$ et $\overline{abc}$ en base $12$ où $a, b$ et $c$ sont des entiers naturels tels que $0 < a < 5$, $0 \leq b < 5$ et $0 \leq c < 5$.

   **(a)** Démontrer que $a + b$ est un multiple de $4$.

   **(b)** Déterminer les entiers $a, b$ et $c$.

2. Soit le polynôme $P$ défini par $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$.

   **(a)** Mettre $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs.

   **(b)** Déterminer suivant les valeurs de $n$ les restes de la division euclidienne de $5^n$ par $13$.

   **(c)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = 5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n$.

   **(c1)** Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $A_n$ est divisible par $13$.

   **(c2)** Quel est le reste de la division de $B = 5^{500} + 5^{375} + 5^{250} + 5^{125}$ par $13$?

**EXERCICE 11**

Soit $f$ la fonction définie sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de $f$ et construire $\mathscr{C}$.

2. Montrer que $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à préciser.

3. On désigne par $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$.

   **(a)** Déterminer $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(\sqrt{2})$.

   **(b)** Tracer la courbe représentative $(\Gamma)$ de $f^{-1}$ dans le repère précédent.