MINESEC
DÉLÉGATION RÉGIONALE DE L'OUEST
LYCÉE DE BANDJOUN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE SCOLAIRE : 2019 – 2020
CLASSE : TERMINALES C ET D
DURÉE : 4 HEURES
COEFFICIENT : 4

EXAMINATEUR : *Nzouekeu Mbitkeu Patrice*

L'ÉPREUVE COMPORTE DES EXERCICES ET DES PROBLÈMES SUR DEUX PAGES. L'EXAMINATEUR TIENDRA COMPTE DE LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION DE L'ÉLÈVE.

Fiche de travaux dirigés N^01

Partie I :Sytèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 1

Déterminer un polynôme Q de degré trois vérifiant les conditions :$Q(1) = -9$, $Q(2) = -9$, $Q(3) = 5$, $Q(4) = 45$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en utilisant la méthode du pivot de Gauss le système (S) suivant :
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 13 \\ -x + 2y + z = -4 \\ 3x - y + 2z = 17 \end{cases}$$
2. Déduire de ce qui précède la résolution dans $\mathbb{R}^3$ de :
$$\begin{cases} 2x^2 + \frac{6}{y-1} + \sqrt{z+3} = 13 \\ -x^2 - \frac{4}{y-1} + \sqrt{z+3} = -4 \\ 3x^2 + \frac{2}{y-1} + 2\sqrt{z+3} = 17 \end{cases}$$
3. x, y et z sont les dimensions d'un parallélépipède rectangle vérifiant le système suivant :
$$\begin{cases} x^2 + \frac{4}{y-1} - 8(\frac{z^2+1}{z}) = -24 \\ 3x^2 - \frac{1}{y-1} + 5(\frac{z^2+1}{z}) = 48 \\ -2x^2 + \frac{3}{y-1} + \frac{z^2+1}{z} = -13 \end{cases}$$
En utilisant un changement de variable, résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss. Déterminer x, y et z sachant que $x \in \mathbb{N}$; $y \in \mathbb{N}$; $z \in \mathbb{N}^*$ et $y \neq 1$, ensuite calculer le volume de ce parallélépipède.

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivent :

$$\begin{cases} 437x + 354y + 191z = 139035 \\ x - y - 15 = 0 \\ x + y + z = 385 \end{cases}$$

2) Une station d'essence affiche les prix suivants à la pompe par litre :
   a) Pétrole : 191F cfa
   b) Gasoil : 354F cfa
   c) Essence super : 437F cfa

   Pour un montant total de 139035F cfa, une entrepreneur remplit trois bidons. L'un avec le pétrole, l'autre avec le gasoil et le dernier avec le super. Le bidon de gasoil contient 15 litres de plus que celui du pétrole. La capacité totale des trois bidons est de 385 litres.
   Déterminer la capacité de chaque bidon.

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivent :

$$\begin{cases} 26x + 11y + 36z = 1263600 \\ 26x + 11y = 36z \\ x + y + z = 46350 \end{cases}$$

2) Un capital de 46350F est scindé en trois parties x ; y ; z placées à des taux différents devant une année. Ces taux sont respectivement $6,5\%$; $2,75\%$ et 9%. Le montant des intérêts acquis à l'issue de l'année est 3159F. Les intérêts acquis par les parts x et y sont égaux à ceux acquis par la part z.
   Déterminer le montant de chacune des parts.

Partie II : Les Nombres complexes

Exercice 1

1. On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.
   a. Calculer $P(4)$
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tel que : $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2cm$.
Soient A, B, C les points d'affixes respectives :
$a = 4 \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad c = 1 - i\sqrt{3}$.
   a. Placer les points A, B et C sur un figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$.
On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
   a. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?
   b. Montrere que les droites $[OC]$ et $[OF]$ sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$.

a. Montrer que le quadrilatère $COFH$ est un carré.

Calculer l'affixe du point H.

Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, l'unité de longueur étant le centimètre, les points A, B, C, D ont pour affixes $3+i$, $7-i$, $-1-7i$, $8-4i$ respectivement.

1. a. placer les points A, B, C, D.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle.
   On précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre I.

3. A tout point M d'affixe z, avec z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{10}{z}$.

   a. Écrire, sous forme algébrique les affixes a', b', c' des points A', B', C' (respectivement associés à A, B, C). Placer les points A', B', C'.

   b. Vérifier que : $\frac{c'-a'}{b'-a'} = 2$.

   c. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

   d. Que peut-on en déduire pour les points A', B', C' ?

Exercice 3

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

a. Calculer $P(-1)$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait : $P(z) = (z+1)(z^2+az+b)$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. (Unité graphique : 2cm) On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = 2+i\sqrt{3}$, $z_C = 2-i\sqrt{3}$ et $z_G = 3$.

a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.

b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC.

3. Soit $[D]$ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CG} = +12 \qquad (1)$$

a. Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,-1); (B,2); (C,2)\}$

b. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation

$$\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \tag{2}$$

c. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble $[D]$.

d. Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.

e. En déduire l'ensemble $[D]$ et le tracer.

Exercice 4

On considère le polynôme P défini pat : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2+3)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = i\overrightarrow{3}$, $z_B = -i\overrightarrow{3}$? $z_C = 3 + 2i\overrightarrow{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$, puis montrer que ces quatres points appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \exp(-\frac{i\pi}{3})$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

Exercice 5 : Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes. Résoudre le système d'équations suivants : $\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases}$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct de centre O, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} + i$, $z_A = -1 + i\sqrt{3}$.
Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle.
Placer les points A et B.

3. Calculer le module et l'argument de $\frac{z_A}{z_B}$.
En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

4. Déterminer l'affixe du point C tel que $ACBO$ soit un losange. Placer le point C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

Partie B

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$z' = \exp(-\frac{\pi}{6})z$.

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A', B' et C', images par f de A, B et C ?
3. Quelles est l'aire du triangle $A'B'C'$ en cm^2 ?

Exercice 6

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal; on prend 2 cm comme unité graphique. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer les points A, B et C.
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Exercice 7

Soit le polynôme $P(Z) = 3Z^3 - 4Z + \lambda$ où Z désigne un nombre complexe et λ un nombre réel. On considère l'équation (E) : $P(Z) = 0$.

1-a) Montrer que si (E) admet une solution complexe Z_0 alors $\overline{Z_0}$ est aussi une solution de (E).

b) En déduire que (E) admet au moins une solution réelle. (on ne demande pas de la déterminer)

2-a) Déterminer λ pour que l'équation (E) admette comme solution réelle $\sqrt{2}$.

b) Résoudre l'équation (E) pour $\lambda = 0$.

3-a) On donne $\lambda = 8$, vérifier que $Z_1 = 1 + i$ est une solution de (E).

b) Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

c) Déterminer le module et un argument à chaque solution de (E).

Exercice 8

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i$.

1. Déterminer les racines carrées de $\omega = -2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_0) : $z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0$.
3. Montrer que $P(z) = [z^2 - (3+3i)z + 5i][z - (3+2i)]$ et en Déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)
   : $z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i = 0$.

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. Unité de longueur sur les axes : 2 cm.

a. Placer les points M, P et Q d'affixes respectives $2 + i$, $1 + 2i$ et $3 + 2i$.

b. Justifier que le triangle MPQ est isocèle rectangle en M.

5. a. Justifier que le symétrique du point Q par rapport au point M est le point S d'affixe $z_S = 1$.

b. Déterminer l'affixe du point R image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

c. Quelle est la nature du quadrilatère $PQRS$? Justifier clairement votre réponse.

Exercice 9

Soit z un nombre complexe distinct de $1 + i$. Soient $Z = \frac{z+2i}{z-1-i}$, A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et $-2i$.

1. Exprimer $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de $x = Re(z)$ et de $y = Im(z)$.
2. Déterminer et construire l'ensemble :
   a. (Γ) des points $M(z)$ du plan tels que Z soit imaginaire pur ou nul.
   b. (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que $|Z| = 1$.

Exercice 10

On considère les nombres complexes $\alpha = 2 - 2i$, $\beta = -\sqrt{3} - i$ et $\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^3}$.

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes α et β.
2. Déduire de la question (1.) le module et un argument de λ.
3. a. Calculer β^2 et α^3 puis mettre λ sous la forme algébrique.

b. De ce qui précède, déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et de $\sin\frac{13\pi}{12}$(*On pourra remarquer que* $\frac{13\pi}{12} = \frac{37\pi}{12} - 2\pi$).

Exercice 11

1) Mettre sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :
a) $(\sqrt{3} - i)^7$; *b)* $(1 + i)^6(1 - i)^5$; *c)* $\frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1-i\sqrt{3})^{12}}$

2.a) Linéariser $\cos^3\theta\sin^2\theta$

b) Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$

3.a) Calculer les racines carrées du nombre complexe $-3 + 4i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2(2 + i)z + 6 = 0$

4) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $(\sqrt{3} + i)^n$ est un réel

Exercice 12

On considère dans le plan complexe les points O d'affixe 0, A d'affixe 1, B d'affixe -1.
A tout point M du plan d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-\overline{z}}$.

1) Montrer que $|z| = 1$
2) Montrer que $\frac{z'-1}{z'+1}$ est réel
3) Montrer que $\frac{z'-1}{z'+1}$ est imaginaire pur

Exercice 13

$\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.On appelle Z le nombre complexe défini par : $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$.

1. On pose $e = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
   Calculer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe Z.
2. Déterminer, puis représenter dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, l'ensemble des points dont l'affixe z est telle que Z soit un nombre réel.

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $Z = 0$.
4. Soit A, B, C les images respectives des nombres complexes : 1 ; $-1+2i$; $-1-2i$.
   Placer les points A, B, C dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal et montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 14

1. Soit z un nombre complexe, $z \neq 0$, et $S_n = \sum\limits_{p=0}^{p=n} z^p$.
   Exprimer S_n en fonction de z et de n.
2. Soit :
   $\begin{cases} \Sigma_1 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta \\ \Sigma_2 = 0 + \sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta \end{cases}$

Calculer $\Sigma_1 + i\Sigma_2$. En déduire Σ_1 et Σ_2.

Partie III : Les Similitudes

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$. (Unité $1cm$).
On construira une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r.
   Monter que B a pour affixe $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant $\{-3, -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$
3. a. Déterminer $r(F)$.
   b. Quelle est la nature du polygone $ABCDEF$?
4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de s'. En déduire l'angle et le rapport de $s'os$.
   b. Quelle est l'image du point D par $s'os$.
   c. Déterminer l'écriture complexe de $s'os$.
5. Soit A' le symétrique de A par rapport à C.
   a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de A' par s'os.
   b. Calculer l'affixe du point A'. Retrouver alors le résultat du **a.** en utilisant l'écriture complexe de $s'os$.

Exercice 2

Le plan étant rapporté a un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1+i$, F d'affixe $2+i$ et G d'affixe $3+i$. La figure sera complétée au fur et à mesure.

1. Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.
2. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte s, en déterminant l'écriture complexe de s.
3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $A' = h(A)$ et $G' = h(G)$, et on appelle I le milieu de $[EA']$. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $s = \sigma o h$

Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On prendre $2cm$ pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a. Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   b. Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Place les points A, B et B'.
2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, a tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 1$.
   a. Montrer que B a pour image B' par f.
   b. Montrer que A est le seul point invariant par f.
   c. Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z'-z}{i-z} = -i$.
   Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
   En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.
3. a. Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.
   b. Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.
   En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.
   c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Exercice 4

Le plan $\mathbb{P}$ est rapporté a un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique $3cm$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que : $a = 3$, $b = 1 + \frac{2}{3}i$, $c = 3i$ et $d = -\frac{1}{3}i$.

1. Représenter les points A, B, C et D
2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.
3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.
4. Soit M le point de coordonnées $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son image par s.
   Monter que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}y + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$

5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant $\begin{cases} M_0 = A \\ M_{n+1} = (M_n) & \textit{, pour tout entier naturel } n \end{cases}$

Pour tout entier naturel, on note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.
Montrer que r_n est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. φ est l'application du plan complexe dans lui-même qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y \end{cases}$

1. Déterminez l'écriture complexe de φ. Déterminez-en que φ est une similitude plane directe.
   Dans la suite de l'exercice, f désigne la transformation du plan d'écriture complexe $z' = (1+i)z - 1$
2. Précisez les éléments caractéristiques de f.
3. a. (Σ) est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 1 = 0$.
   Montrez que (Σ) est un cercle que vous caractérisez.
   b. Déterminez l'image par f du cercle (Σ).
4. Déterminez l'image par f de la droite (Δ) d'équation cartésienne $3x - 2y - 1 = 0$.

.

Fiche de travaux dirigés $N^0 2$

Partie I : Limites et continuité

Exercice 1

Étudiez les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$; 2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+x}$; 3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$; 4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-x}{3x}$;

5) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; 6) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x}$; 7) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{7}}{x-2}$; 8) $\lim_{x\to-2}\frac{|x|-2}{x^2-4}$

Exercice 2

Étudiez les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$; 2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$; 3) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}$; 4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$; 6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$; 7) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$;

8) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{\sin x}{x}$.
Étudiez les limites de f en 0, -1, en $+\infty$, en $-\infty$.

9) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}$; 10) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Exercice 3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=-x+2 & \text{pour } x<3 \\ f(x)=x-4 & \text{pour } 3\leq x<5 \\ f(x)=-2x+13 & \text{pour } x\geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Soit la fonction numérique $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. On considère la fonction $g : x \longmapsto (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})\sin(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$
   a. Justifier que : $\forall x\in D_f, g(x)=2\frac{\sin f(x)}{f(x)}$.
   b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Partie II : Dérivation, primitives et étude des fonctions

Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $\sin^2 x \sin(x^2)$; 2) $\frac{4-\cos^2 x}{1-\sin}$; 3) $\sin x \cos^4 x$; 4) $\sin^3 x$;

5) $\cos(\sqrt{3x^2})$; 6) $\sqrt{\cos x}$; 7) $\sin(3x^2)$; 8) $x\sqrt{1-2x-x^2}$

9) $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$; 10) $(4x^2-2x+2)\sqrt{3-x}$; 11) $\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$; 12) $\frac{(x-3)^4}{(x+2)^6}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants : Déterminer l'ensemble de définition de f et déterminer la fonction dérivée f' de f.

1) $f(x) = \frac{x^3+x^2+3}{x}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{x-2}$; 3) $f(x) = \frac{3x^2-4x}{4(1-x)}$; 4) $f(x) = \frac{x^3+4x^2+x-2}{(x+1)^2}$

5) $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{2(x+1)}$; 6) $f(x) = 2x+1-\frac{2}{(1-x)^2}$

Exercice 3

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction sin est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$. (*Rappel : on pourra utiliser la démonstration par récurrence*)

Exercice 4

Soit f la fonction qui, à tout réel x de l'intervalle $I = [0,1]$, associe le nombre réel $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur I. Quel est l'ensemble de définition de f^{-1} ?

2) La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur I ? Si oui, déterminer sa fonction dérivée $(f^{-1})'$.

Exercice 5

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x - 4$.

1) Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3) En déduire le signe de $g(x)$.

4) On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de f.

5) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]1;+\infty[$.

6) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Dresser le tableau de variation de f. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.

7) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f représentative de la fonction f en $+\infty$.

8) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 6

1) Trouvez la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 7$, telle que $F(1) = -7$.

2) Trouvez la primitive F de la fonction f définie par : $f(x) = \cos 5x - 3\sin 6x$ telle que $F(\frac{\pi}{6}) = 1$.

3) Trouvez la primitive F de la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x}{(x^2-4)^2}$, telle que $F(4) = 0$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 2$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer les images par f de $[-1; 3[$; $[2; +\infty[$, $\mathbb{R}$
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{7}{4}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

4.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; 2]$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de cette équation qui est dans $[0; 2]$.

5. Soit g la restriction de f à $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.
Montrer que g est une bijection de $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ vers un intervalle J que l'on précisera. Puis, dresser le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1}.

Exercice 8

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty; 1]$ par $g(x) = \sqrt{1-x}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a : $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2}$ (où g' est la fonction dérivée de g)
2. En appliquant les inégalités des accroissements finis, déduire de 1) que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a : $1 - \frac{x}{2} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$

Exercice 9/PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{x}$.

1. Dresser le tableau de variation de f. On précisera les limites aux bornes du domaine de définition.
2. Montrer que $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$.

PARTIE B

Soit la fonction g définie sur $D_g =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
On note (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

1. a. Montrer que g est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.
   b. Étudier alors les variations de la fonction g sur $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout $x < -1$: $\frac{g(x)-g(-1)}{x-1} = \sqrt{\frac{x^2-x+2}{x(x+1)}}$.
   b. En déduire que la fonction g n'est pas dérivable en -1.
   c. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse -1.
3. a. Montrer que, pour tout réel x de D_g : $g(x) - x = \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1+\frac{2}{x}+x}}$
   b. En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
   c. Montrer de même que la droite (Δ') d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.

4. Construire dans un repère orthonormé la courbe (C), les asymptotes (Δ), (Δ') et la tangente (T) à (C) en -1.

Exercice 10

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{1+x}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer les dérivées première et seconde de g sur $[0; +\infty[$.
2. Vérifier que $\forall x \in [0; a]$, $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.
3. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur $[0; a]$; démontrer que : $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$.

.

Fiche de travaux dirigés $N^0 3$

Partie I : Fonctions logarithmes

Exercice 1/Partie A

Prérequis : On rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{lnx}{x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique $2cm$).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]O; +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2lnx$.
   a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]O; +\infty[$.
   b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]O; +\infty[$.
2. Etude de la fonction f.
   a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f.
3. Éléments graphiques et tracés.
   a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C).
   b. Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ).
   c. Tracer la courbe (C) et la droite (Δ).

Exercice 2

1. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + lnx$.
   a. Étudier les variations de u sur $]0; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
   b. i. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$.
      On note α cette solution.
      ii. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
   d. Montrer l'égalité : $ln\alpha = 2 - \alpha^2$.
2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - lnx)^2$.
   On note f' la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$.
   a. Exprimer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
   b. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note :
   - Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
   - A le point de coordonnées $(0; 2)$;
   - M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0; +\infty[$.

   a. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.

   b. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

      i. Montrer que les fonctions f et g ont mêmes variations sur $]0; +\infty[$.

      ii. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

      iii. Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2 - x - \frac{4lnx}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 - 4 + 4lnx$.

   a. Étudier le sens de variation de g et déterminer son maximum sur $]0; +\infty[$.

   b. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

2. a. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de f et donner son tableau de variations.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 vérifiant $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$.
4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (Δ).
5. Déterminer les coordonnées du point A de (C) en lequel (C) admet une tangente (T) parallèle à la droite (Δ).
6. Tracer les droites (Δ) et (T), puis la courbe (C).

Exercice 4

Le plan $\mathbb{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2lnx}{x^2}$.
Soit (C) la courbe représentative de f et soit (C') celle de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que (C) a deux asymptotes que l'on déterminera.
2. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.
3. Soit I le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de I.
4. Pour tout c de $]0; +\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2lnx$.

   a. Étudier les variations de la fonction g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0;2[$ et $]2;4[$. Soit α la solution appartenant à $]2;4[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. a. Montrer que $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que (C) et (C') se coupent en deux points.

   b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie : $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$.

6. Tracer (C) et (C').

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{lnx}{x} + e$.
On note C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_g.
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. Dresser le tableau de variation de g.
3. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $g(x) = e$.
4. Calculer $g(\frac{1}{e})$. En déduire, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, le signe de $g(x)$.
5. Tracer C_g en indiquant les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. Faire apparaître sur le graphique le résultat de la question 3).

Partie II : Fonctions exponentielles

Exercice 1/Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0;+\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$ et (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.
On admet que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   a. Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$
   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0;1]$.
3. Déterminer une primitive de f sur $[0;1]$.

Exercice 2/Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x)+1$.

1. Étudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,27; 1,28]$; on note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0[$.
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie il est question d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x+1} + 2$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; unités graphiques : $1cm$ sur l'axe des abscisses et $2cm$ sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpreter graphiquement ce résultat.
2. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour C_f.
   c. Étudier la position de C_f par rapport à (d).
3. a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la **Partie A**.
   b. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe C_f dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

Exercice 3

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer l'équation cartésienne réduite de la tangente (T) à la courbe (C) au point A de la courbe d'abscisse 0.
6. Dans cette question, on étudie les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (T). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$
   a. Démontrer que pour tout réel x, on a : $\varphi'(x) = -\frac{1}{4}(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}})^2$
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ et $\varphi(0)$
   c. Conclure en ce qui concerne les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (T).
7. Tracer la tangente (T), la courbe (C), et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

8. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$. On note (C_g) la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Quelle transformation géométrique permet d'obtenir la courbe (C_g) à partir de (C) ?
   b. Démontrer que g est impaire. Quelle pro(C_g) ?
   c. Quel rôle joue le point $A(0; \frac{1}{2})$ pour la courbe (C) ? Expliquer.

Exercice 4

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction de la variable réelle x définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)(e^{-2x}+1)$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités $1cm$ sur les axes.

1. Soit g, la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-2x} - 2x - 1$.
   Étudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ la dérivée de f s'écrit $f'(x) = e^{-2x}g(x)$.
3. En déduire de 1) le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat.
   b. Montrer que la droite $(d) : y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f).
   c. Étudier les positions relatives de (d) et (C_f).
   d. Tracer (d) et (C_f) dans le repère.
5. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$.
   a. Justifier que h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $]-\infty; 2[$.
   b. Dresser le tableau de variation de h^{-1}, puis tracer sa courbe dans le même repère que (C_f) (h^{-1} désigne la bijection réciproque de h).

Exercice 5/Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{2x-2}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On prendra $5cm$ comme unité sur les axes.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Vérifier que pour tout réel x non nul on a : $f(x) = x[1 - 2e^{-2} \times (\frac{e^{2x}}{2x})]$
   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C).
   Étudier la position relative de (C) et de (D).
4. On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1.
   Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).

5. a. On note I l'intervalle $[0; 0,5]$.
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera α.

   b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.
6. Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = e^{2U_n - 2} \end{cases}$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x-2}$.
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$.
2. Dresser le tableau de variation de $g'(x)$ sur $I = [0; 0,5]$ puis en déduire que pour tout x de l'intervalle I, on a $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.
3. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x) \in I$.
4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|U_n - \alpha|$
5. Démontrer par récurrence que $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n$
6. En déduire la limite de la suite U_n.
7. Déterminer un entier naturel p tel que $|U_p - \alpha| \leq 10^{-5}$

.

Fiche de travaux dirigés $N^0 4$

Partie I : Calcul intégral

Exercice 1

1. Calculer chacune des intégrales suivantes :

   a. $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 - \sin u] \cos^3 u du$; b. $B = \int_{-1}^{1} [|1 - e^{-2t+1}| + 1] dt$; c. $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$

   d. $D = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{-x^3 + 3x^2 + 1}} dx$; e. $E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \tan(2t) dt$; f.$F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x dx}$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, $\frac{\sin x}{1+\pi^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+\frac{\pi^2}{4}}$

   b. En déduire un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$

3. On pose $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$, $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$ et $J_2 = J_1 + J$

   a. Calculer J_2.

   b. Calculer J_1.

   c. En déduire J.

4. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

   a. Calculer U_1.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

   c. En déduire la convergence de la suite (U_n).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

1. a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$

   b. Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

   b. En déduire, que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite da la suite u_n.

Exercice 3

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt$.

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. Dans cette question, on définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n = \int_1^n (t+1) e^{-t} dt$:

   a. Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t + 1$.

   b. En déduire que $J_n \leq I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n).

Exercice 4

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :
$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.
   a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:
   $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.
   b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$.
Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnx dx$.
On donnera le résultat exact sous la forme $pln2 + qln3$, avec p et q rationnels.

Exercice 5

Le but de cet exercice est d'étudier une fonction et tracer sa courbe représentative, d'étudier la position de la courbe par rapport à l'une de ses tangentes et de calculer une aire.
Soit $f$la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2xlnx - x$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Unités graphiques utilisées : $2cm$ sur chaque axe.

Partie A. Etude de la fonction f

1. Etude des limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
   a. Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$.
   b. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = 2lnx + 1$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe (C) de f.
5. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses. Placer ce point A sur le graphique.

Partie B. Position de (C) par rapport à l'une de ses tangentes

1. Établir qu'une équation de la droite (Δ), tangente en A à la courbe (C) est :
   $y = 2x - 2\sqrt{e}$. Tracer (Δ) sur le même repère que (C) de f.
2. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - (2x - 22\sqrt{e})$.
   a. Calculer $g'(x)$.
   b. A l'aide du tableau de variations de g, montrer que $g(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$.

Partie C. Calcul d'une aire

Soit H la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $H(x) = x^2(lnx - \frac{1}{2})$.

1. Calculer $H'(x)$.
2. Calculer la valeur exacte de $\int_{\sqrt{e}}^{e}(2xlnx - 3x + 2\sqrt{e})dx$.
3. Cette intégrale correspond au calcul de l'aire d'un domaine plan.
   a. Colorier ce domaine sur la figure.
   b. Donner, en cm^2, une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.

Exercice 6/Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + (-x + 2)e^{-x}$.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g et étudier son signe selon les valeurs de x.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Préciser $g(3)$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$.
On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormal. On prendra $2cm$ pour une unité graphique.

1. Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$.
3. a. Vérifier que $f(x) = x + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C).
   c. Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ).
   On précisera les coordonnées de leur point d'intersection A.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe (C) ainsi que la droite (Δ).

Partie C

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x + (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f.
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine du plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   En donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique $2cm$.
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = (-x+4)e^{x-1}$ et $g(x) = ln(\frac{x+6}{2x+2})$.
Dans le repère choisi, on appelle (C) la courbe représentative de f et (Γ) la courbe représentative de g.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Vérifier que la fonction dérivée de f est définie pour tout x positif par
   $f'(x) = (-x+3)e^{x-1}$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations. On précisera $f(0)$, $f'(0)$, $f(3)$, $f'(3)$.
4. Tracer la courbe (C).
5. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)e^{x-1}$ soit une primitive de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $u(x) = \frac{x+6}{2x+2}$.

1. Vérifier que, pour tout x positif, $u(x)$ est strictement positif.
2. a. Déterminer la limite de $u(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   b. Étudier le sens de variation de u.
   Dresser le tableau de variations de u et retrouver le résultat de la question 1. de la partie B.
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le sens de variation de la fonction g et démontrer que la courbe (Γ) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.
4. Tracer la courbe (Γ) et la droite (D) sur le même graphique que celui de la partie A.
5. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
   $G(x) = (x+6)ln(x+6) - (x+1)ln(2x+2)$.
   Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle$[0;+\infty[$.

Partie C

1. Résoudre, à l'aide des représentations graphiques faites, l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
2. Calculer l'aire $\mathbb{A}$ en cm^2 du domaine du plan constitué des points $M(x;y)$ tels que : $2 \leq x \leq 3$ et $g(x) \leq y \leq f(x)$.
   Donner l'arrondi de $\mathbb{A}$ à l'unité près.

Partie II : Equations différentielles

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) : $9y'' + 16y = 0$

1. Déterminez la solution générale de (E).
2. Déterminez la solution particulière f de (E) vérifiant : $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{8}{3}$.
   Écrivez cette solution sous la forme : $f(x) = A\cos(wx+\varphi)$; A, w et φ étant des constantes réelles à déterminer.

Exercice 2

1. On considère l'équation différentielle (E) : $xy' = 1$.

   a. En utilisant la technique de l'intégration par parties, calculer $\int lnxdx$

   b. Résoudre alors l'équation (E).

   c. Déterminer la solution particulière de (E) avec comme conditions initiales $y'(1) = ln2$ et $y(\frac{1}{2}) = 0$
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$ avec comme conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = -1$.

Exercice 3

Considérons les équations différentielles (E_0) : $y'' + 4y' + 4y = 0$ et (E) : $y'' + 4y' + 4y = 4x - 8$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0).
2. Déterminer la fonction affine qui est solution de l'équation différentielle (E).
3. Dans cette question, φ est la fonction définie par : $\varphi(x) = x - 3$.
   a. Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Prouver que f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de (E_0).
   b. En déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer g la solution de (E) dont la courbe représentative (Γ) passe par $A(0; 2)$ et y admet une tangente (T) parallèle à la droite (D) d'équation $2x + y - 5 = 0$.

Exercice 4

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x dx$.

1. a. Résoudre l'équation différentielles (E) : $y'' - 4y' + 8y = 0$.
   b. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse 0 une tangente d'équation cartésienne $y = x + \frac{1}{4}$.
2. Calculer $I + J$.
3. Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(cos2x + sin2x)$.
   a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
   b. En déduire le calcul de $I - J$.
4. Calculer alors I et J.

Exercice 5

1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = (x + 3)e^{-2x}$.
   a. Montrer que g est une solution de (E).
   b. Déterminer une primitive G de g en utilisant :
      i. l'équation différentielle (E).
      ii. une intégration par parties.
3. Soit F la fonction définie par : $F(x) = -\frac{1}{4}(2x + 1)e^{-2x} + \frac{1}{4}$.
   a. Montrer que la restriction H de F à $[0; +\infty[$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
   b. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de H^{-1}, fonction réciproque de H.

Partie III : Suites numériques

Exercice 1

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 5U_{n+1} - 2U_n = 6$.

1. Calculer les termes U_1 et U_2.
2. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 2$.
   Établir que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une progression géométrique.
3. a. Exprimer $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

   b. Exprimer $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2

Cet exercice comporte deux parties A et B indépendantes.

Partie A

On considère les suites (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \end{cases}$ et (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que u est une suite arithmétique.
2. Déterminer u_n puis v_n en fonction de n.
3. Étudier la convergence de chacune des suites u et v.

Partie B

$(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite numérique définie par : $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} w_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$

1. Déterminer w_2 et w_3.
2. Établir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n \leq 3$.
3. a. Établir que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   b. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. On considère la suite numérique (α_n) de terme général $\alpha_n = n(3 - w_n)$.

   a. Établir que la suite (α_n) est une suite géométrique convergente dont-on précisera le premier terme et la raison.

   b. Exprimer (α_n) puis $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} \end{cases}$;

1. On considère la suite (s_n) définie par $s_n = u_n + v_n$.
   Montrer par récurrence que la suite (s_n) est constante.

2. On considère la suite (d_n) définie par $s_n = v_n - u_n$.
   Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont-on donnera la raison et le premier terme.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$.
4. Écrire u_n en fonction de s_n et de d_n, puis en fonction de n. Écrire v_n en fonction de s_n et de d_n, puis en fonction de n. En déduire la limite de u_n et celle de v_n.

Exercice 4

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (I_n) définie pour tout entier naturel par les relations :
$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$; $I_1 = \int_0^{e^x} \frac{1}{1+e^x} dx$;... ; $I_n = \int_0^{e^{nx}} \frac{1}{1+e^x} dx$

1. Calculer $I_0 + I_1$ et I_1. En déduire la valeur de I_0.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n. En déduire les valeurs de I_2 et I_3.
3. Comparer, pour x élément de $[0, 1]$, les nombres e^{nx} et $e^{(n+1)x}$.
   Sans calculer I_n, démontrer que la suite (I_n) est croissante.
4. Montrer que, pour tout nombre réel x de $[0, 1]$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.
   En déduire un encadrement de (I_n) (à cet effet vous calculerez $\int_0^1 e^{nx} dx$).
   Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Exercice 5

1. Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x}$
   a. Étudier les variations de f.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $ln(n+1) - ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
   c. Démontrer de même que, pour tout entier naturel n non nul, $ln(n+1) - ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$
2. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq ln(n+1)$
   b. Étudier la convergence de la suite (U_n).
3. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $V_n = U_n - ln(n)$.
   a. Étudier le sens de variation de (V_n).
   b. En déduire que la suite (V_n) est convergente.
4. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la suite (W_n) par $W_n = \frac{U_n}{ln(n)}$.
   a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $1 \leq W_n \leq \frac{1}{ln(n)}$
   b. Déterminer la limite de la suite (W_n).

Exercice 6

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (3e^x - x - 4)e^{3x}$.
On admet qu'il existe un nombre réel a et un seul dans l'intervalle $I = [0; 1]$ tel que $h(a) = 0$.

1. Justifier que, dans l'intervalle I, l'équation $h(x) = 0$ est équivalente à l'équation $3e^x - x - 4 = 0$ puis à l'équation $x = ln(\frac{x+4}{3})$.
2. On considère la fonction φ définie sur l'intervalle I par $\varphi(x) = ln(\frac{x+4}{3})$.
   a. Montrer que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \in I$.
   b. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
   c. Calculer $\varphi(a)$
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}|u_n - a|$.
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq (\frac{1}{4})^n$.
   c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Préciser sa limite.
   d. Déterminer un nombre entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de a à 10^{-4} près. Donner une valeur approchée de u_p à 10^{-4}.

Exercice 7

On définit pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'intégral $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$.

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$
4. Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + I_n$
5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $u_n = \frac{2^n}{n!}$.
   a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
   b. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3(\frac{1}{2})^{n-3}$
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que $e^2 = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!})$

Fiche de travaux dirigés $N^0 5$

Partie I :Probabilités

Exercice 1

Un touriste européen veut visiter trois villes de l'ouest de la Côte d'Ivoire parmi les cinq suivantes : Danané, Man, Biankouma, Duékoué, Guiglo.
Combien d'itinéraires peut-il concevoir ?

Exercice 2

Une classe de 30 élèves qui décident de désigner un chef de classe, deux adjoints, deux responsables de l'entretien. Ces cinq élèves forment un comité. Cette classe est composée de 12 garçons internes, 12 garçons externes, 3 filles externes et 3 filles internes.
De combien de façons différentes peut-on composer le comité si l'on veut que :
a) Le chef soit interne ?
b) Les adjoints soient de sexe différents ?

Exercice 3

On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures.
Calculer les probabilités des événements suivants :
1) A " la somme des numéros obtenus est égale à 6 "
2) B " la somme des numéros obtenus est impair "
3) C " la somme des numéros obtenus est pair "
4) D " la somme des numéros obtenus est supérieure à 8 "
5) E " la somme des numéros obtenus est inférieure à 4 "

Exercice 4

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois plus grande que l'apparition des autres numéros.
a) Calculer les probabilité de l'apparition de chaque numéro.
b) Calculer les probabilités des événements suivants :
i) Obtenir un nombre pair ;
ii) Obtenir un nombre impair.

Exercice 5

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer.
On considère alors l'équation du second degré : $x^2 + ax + b = 0$.
Calculer la probabilité pour que cette équation admette des solutions (distinctes ou confondues).

Exercice 6

Une urne contient trois boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule, deux fois de suite, lors de tirages avec remise.
a) Quels sont les événements élémentaires de cette expérience ? Combien y a t-il ?
b) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

R_1 " Tirer une boule rouge au premier tirage "

R_2 " Tirer une boule rouge au second tirage "

$R_1 \cap R_2$ et $R_1 \cup R_2$.

Exercice 7

On considère un sac contenant trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A " On obtient au moins une boule blanche "

B " On obtient au moins deux boule noire "

C " On obtient au moins une boule de chaque couleur "

2) Définir l'événement $A \cap B$ par une phrase simple, puis calculer sa probabilité.

Exercice 8

On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes.

1) La seconde carte est tirée après remise de la première dans le jeu (tirages indépendants).

a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?

b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

2) La seconde carte est tirée sans qu'on ait préalablement remis la première dans le jeu (tirage exhaustif).

a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?

b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

Exercice 9

On lance 100 fois une pièce en l'air et on note les côtés (pile P et face F) obtenus successivement. Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne 50 fois pile ?

Partie II :Statistiques

Exercice 1

Le tableau ci-dessous représente la population X des pays de la zone CEMAC et le nombre Y d'analphabètes de chacun de ces pays (tous exprimées en millions d'habitants).

a) Représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), le nuage de points associé à cette série statistique.

(On prendra en abscisse 1cm, et en ordonnées 4cm, pour un million d'habitants).

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique.

c) Déterminer en utilisant la méthode de Mayer une équation cartésienne de la droite d'ajustement linéaire de ce nuage de points.

d) Donner une estimation du nombre d'analphabètes qu'aura le Tchad lorsque la population de ce pays atteindra 10,2 millions d'habitants.

Exercice 2

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	69
Y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

a) Représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), le nuage de points associé à cette série statistique.

(On prendra en abscisse $0,1cm$ pour 1 an, et en ordonnées $0,5cm$ pour l'unité de tension artérielle).

b) Calculer la moyenne et la variance des série statistiques associées aux variables X et Y.

3 a) Trouver une équation de la droite de régression de Y en X.

b) Trouver une équation de la droite de régression de X en Y.

c) Représenter ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y.

5) Donner une estimation de la tension maximale d'ne personne âgé de $70ans$.

Exercice 3

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules bleues. On tire deux boules simultanément et au hasard. On gagne 100FCFA par boule rouge tirée. On désigne par X la variable aléatoire qui à la suite d'un tirage associe le gain obtenue.

1) Déterminer les gains possibles.

2) déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

3) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.