Table des matières

Lycée Classique de Bafoussam 2015-2016

Travaux dirigés de Mathématiques Première C/D

0.1 Barycentre

Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral tels que $AB = 6$. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC, et par A', B' et C' les milieu respectifs de $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

1. Faire la figure.
2. Que peut-on dire des points A, G et A' ?
3. En utilisant le théorème des barycentres partiels, écrire G comme barycentre des points A et A' affecté des coefficients que l'on déterminera.
4. Calculer en utilisant le théorème précédente les distances AG, BG et CG puis compare les.
4. détermine et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2+MC^2 = 72$

Exercice 2

Soit A et B des points du plan tels que $AB = 4$ cm

1. Construire le barycentre G de $(A;3)$ et $(B;1)$.
2. Construire le point G' tels que $\overrightarrow{BG'} = 5\overrightarrow{AG'}$.
3. Déterminer et construire l'ensemble $\pounds$ des points M du plan tels que :
   $\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

Exercice 3

ABC est un triangle. G est le barycentre de $(A;-1),(B;2)$ et $(C;1)$.

1. a) Établir que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et construire G.

   b) Donner une autre construction de G à l'aide du barycentre partiel H de $(A;-1)$ et $(B;2)$.

2. a) Déterminer l'ensemble $\pounds$ des points M du plan tels que :
   $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$

   b) Vérifier que $B \in \pounds$ et construire $\pounds$.

Exercice 4

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ cm.

1. Construire le barycentre C de $(A;-1)$ et $(B;5)$.
2. Déterminer des réels x et y tels que B soit le barycentre de $(A;x)$ et $(C;y)$.
3. Déterminer et construire l'ensemble $\pounds$ des points M du plan tels que :
   $\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MC}\| = 10$

Exercice 5

Dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
On considère les points $M(-1;2)$ et $N(3;5)$.

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de $(M;3)$ et $(N;1)$.
2. Déterminer le réel α tel que le barycentre H de $(M;\alpha)$ et $(N;1)$ appartienne à l'axe des abscisses. Préciser le point H correspondant.
3. Représenter les points M, N, G et H.

Exercice 6

Soit ABC un triangle.

1. Construire le barycentre G de $(A;1),(B;3)$ et $(C;-2)$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points P du plan tels que :
   $\|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}\| = \|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\|$. Représenter $\mathcal{D}$.

Exercice 7

Dans un repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, On considère les points $A(3;2)$, $B(2;2)$ et $C(1;-1)$.

1. Pour quelles valeurs du réel m existe-t-il un barycentre G de $(A;1),(B;m)$ et $(C;1-3m)$?
2. On suppose remplir la condition du 1.

   a) Calculer les coordonnées $(x_G;y_G)$ du point G en fonction de m.

   b) Pour quelle valeur de m le point G appartient-il à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$? Calculer les coordonnées du point G correspondant.

Exercice 8
Des triangles ABC et $A'B'C'$ ont pour centres de gravité respectifs les points G et G'.
Démontrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Exercice 9
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, On considère les points $A(-2; 2)$, $B(3; 1)$ et $C(1; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
2. Déterminer le point $D(x; y)$ tel que le triangle ABD ait pour centre de gravité l'origine O du repère.
3. Faire une figure.

Exercice 10
Soit ABC un triangle, I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB}$.
On note G le symétrique de B par rapport à I.
On veut établir que les G, C et J sont alignés.

1. Première méthode : utiliser un barycentre partiel.
   (a) Démontrer que G est le barycentre de $(A; 2), (B; -3)$ et $(C; 4)$.
   (b) En déduire que G, C et J sont alignés.
2. Deuxième méthode : utiliser un repère.
   (a) Calculer les coordonnées de G, C et J dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   (b) Retrouver que G, C et J sont alignés.

Exercice 11

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A(1; -3)$ et $B(1; 3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G du plan milieu du segment $[AB]$.
2. a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MG^2 - \frac{AB^2}{4}$.
   b) En déduire la nature de Γ, ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$
   c) Construire Γ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
4. Γ rencontre l'axe (Ox) en deux points C et D et la parallèle à l'axe (Oy) passant par G en deux points E et F.
   a) Déterminer les coordonnées des points C, D, E et F.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $CDEF$
   c) Calculer son aire.

Exercice 12

1. ABC est un triangle équilatéral de coté a ; A' le milieu de $[BC]$ et G est le barycentre des points $(A;-4),(B;1)$ et $(C;1)$. La droite (BG) coupe la droite (AC) en I.
   a) Démontrer que A est le milieu du segment $[A'G]$.
   b) Faire la figure.
   c) Écrire I comme barycentre des points A et C.
2. Déterminer en fonction de k (k réel) la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points M du plan tels que : $-4MA^2+2MA'^2=k$

Exercice 13

ABC est un triangle rectangle en C ; m est un réel différent de -2. I désigne le milieu de $[AB]$ et G désigne le barycentre de $\{(A;1);(B;1)\,;\,(C;m)\}$.

1. a) Que représente le point G pour le triangle ABC lorsque $m=1$?
   b) Déterminer le lieu des points G lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction g définie pour tout M du plan par : $g(M)=MA^2+MB^2+mMC^2$
   a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $g(M)=(m+2)MG^2+g(G)$
   b) Démontrer que $g(G)=\frac{m+1}{m+2}AB^2$
3. Déterminer l'ensemble (E_m) des points M du plan tels que $g(M)=AB^2$
4. Montrer que pour tout réel $m\neq-2$, le point C appartient à (E_m) en déduire une construction de (E_-3).

Exercice 14

partie A

Dans le plan (P), on considère un triangle équilatéral ABC. On pose $AB=a$. Soit I le milieu de $[BC]$ et O le centre du triangle ABC

1. a) Démontrer que le système de points pondérés $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$ admet un barycentre G. Placer les points A,B,C,I,O et G sur une même figure
   b) Démontrer que le triangle ACG est rectangle en C
2. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=a$ (1)
   a) Démontrer que la relation (1) équivaut à $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=\frac{a^2}{3}$ (2)
   b) Démontrer que A appartient à (D)
   c) Démontrer que la relation (2) équivaut à $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$
   d) En déduire l'ensemble (D)
3. Soit (E) l'ensemble défini par : $-MA^2+2MB^2+2MC^2=\frac{110}{9}a^2$ Déterminer (E)

partie B

On donne les coordonnées de A,B et C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ tels que
$A(2\sqrt{3};1-3\sqrt{3});B(-3;-4);C(3;2)$ et $a=6\sqrt{2}$

a) Déterminer les coordonnées de G
b) Écrire l'équation cartésienne et l'équation paramétrique de (E)

c) Écrire l'équation cartésienne de (D) puis étudier la position relative de $(D) \cap (E)$

Exercice 15

ABC est un triangle équilatéral de côté 4. D est le point du plan tel que : $3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

1. Démontrer que D est le barycentre des points A, B et C affecter des coefficients que l'on déterminera.
2. I étant le milieu de $[AC]$, démontrer que D est le barycentre des points B et I affecter des coefficients que l'on déterminera.
   En déduire que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.
3. Calculer AD, BD et CD.
   Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :
   $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 16$.
   Vérifier que le centre de gravité O de ABC appartient à E.

Exercice 16

ABC est un triangle équilatéral de côté 3 cm. B' est le milieu de $[AC]$ et D est le point du plan tel que : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que D est le barycentre des points pondérés $\{(A; 3); (B; -2); (C; 3)\}$.
   En déduire que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.
2. Démontrer que : $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$
3. Calculer : DA^2 et DB^2
4. Déterminer l'ensemble E des points M vérifiant :
   $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

Exercice 17

L'unité est le cm. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $AB = AC = 5$, $BC = 6$ et G=bar{(A ;2),(B ;3),(C ;3)}.

1. a) Faire une figure **(0,5pt)**
   b) Utiliser la propriété d'Al kashi pour déterminer $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.
   (On rappelle que d'apres Al kashi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$). **(0,5pt)**
   c) En déduire donc le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. **(0,25pt)**
   d) Soit I le milieu du segment [BC]. **(1,5pt)**
   Ecrire G comme barycentre des points A et I et en déduire que $AG = 3$. **(0,75pt)**
2. Soit g une application du plan dans lui-même qui à tout point M associe :
   $g(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.
   a) Calculer $g(A)$. **(0,5pt)**
   b) Montrer que : $g(M) = 4MG^2 + g(G)$. **(1pt)**
3. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $g(M) = g(A)$.
   a) Déterminer en discutant suivant les valeurs de $g(G)$ la nature de (Γ). **(0,75pt)**
   b) Représenter (Γ) sur la figure précédente sachant que $g(G) = 5$. **(0,75pt)**

0.2 Trigonométrie

Exercice 0

1. Déterminer le nombre réel a, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ tel que : $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos(x+a)$ **1 pt**
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$ **2 pts**
3. Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique **1 pt**

Exercice 1

1. Montrer que pour tout réel x, $\cos x \sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{16}\sin 16x$
2. En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{32}\sin\dfrac{\pi}{32}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{16}$.
3. On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par :
   $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.
   (a) Calculer $P(-1)$; en déduire que $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
   (b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ et en déduire dans $]-\pi; \pi[$ les solution de l'équation : $2\sin^3 2x + 5\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$

Exercice 2

1. Donner les valeurs exactes du cosinus, sinus et de la tangente $\dfrac{\pi}{12}$ sachant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$
2. On considère l'équation (E) : $\sin 3x = \sin 2x$.
3. Résoudre (E) dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, puis représenter les points images des solutions sur le cercles trigonométrique (unité graphique : 2cm).
4. (a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$.
   (b) En déduire que l'équation (E) est équivalente à
   (E') : $\sin x(4\cos^2 x - 2\cos x - 1) = 0$
   (c) Quelle sont parmi les solutions de (E) trouvées à la question 1., celles qui sont solution de (E'') : $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.
5. (a) Résoudre dan $\mathbb{R}$ l'équation : $4t^2 - 2t - 1 = 0$
   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{5}$

Exercice 3

1. (a) Démontrer que pour tout réel α, $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.
   (b) En remarquant que $\dfrac{\pi}{6} = 2 \times \dfrac{\pi}{12}$ donner les valeurs exactes du cosinus ,du sinus et de la tangente $\dfrac{\pi}{12}$
2. (a) Écrire $(1-\sqrt{3})^2$, puis $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des réels.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - (3-\sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0$

(c) En déduire dans $[0; 2\pi[$, les solutions de l'équation
$\tan^2 2x - (3-\sqrt{3})\tan 2x + 2 - \sqrt{3} = 0$.

(d) Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométriques.

Exercice 4

1. Déterminer la mesure principale de $\dfrac{11\pi}{6}$.
2. Déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\dfrac{11\pi}{6}$.
3. En déduire que $\cos^2 \dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ et que $\sin^2 \dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$
4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos \dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{11\pi}{12}$ en justifiant les réponses.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x - \sqrt{2+\sqrt{3}}\cos x = -\sqrt{2}$
6. Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'inéquation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x - \sqrt{2+\sqrt{3}}\cos x \geq -\sqrt{2}$

Exercice 5

1. (a) Démontrer que $\dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$

   (b) Montrer que $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

   (c) Soit (E) l'équation $\dfrac{2}{1+\tan^2 x} + (1-\sqrt{2})\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$
   Résoudre (E) dans $[0; 2\pi]$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

   (d) En déduire dans $[0; 2\pi]$ les solutions de l'inéquation
   $\dfrac{2}{1+\tan^2 x} + (1-\sqrt{2})\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$

2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$

   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 2\sin(2x - \dfrac{\pi}{3})$

   (b) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $f(x) - 1 = 0$

Exercice 6

1. (a) Vérifier que : $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$

   (c) En déduire dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ les solutions de l'équation
   $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{6} = 0$

   (d) Placer les points A ; B ; C et D , images respectives des solutions x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

   (e) Quelle est la nature du polygone $ABCD$? Calculer la valeur exacte de son aire

2. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation $4\cos^2 x + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cos x - \sqrt{6} \geq 0$

Exercice 7

1. Déterminer le nombre réel a, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ tel que : $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos(x+a)$
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$
3. Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique

Exercice 8

1. Écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
2. En déduire que : $\tan 3x = \tan x \dfrac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

Exercice 9

On rappelle que $\tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1. Démontrer que pour tout élément x de $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})\}$
   $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.
2. On pose $t = \tan \dfrac{\pi}{12}$, montrer que t est une solution de l'équation (E) : $x^2\sqrt{3} + 6x - \sqrt{3} = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
4. En déduire que $\tan \dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.
5. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\tan x \geq 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 10

1. On considère l'équation (E) : $|\cos x| = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Exprimer $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$.
2. En déduire que l'équation (E) peut s'écrire : $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 11

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y^2 + 2y - 1 = 0$.
2. Démontrer que pour tout élément a et b de $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$
   $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, puis en déduire l'expression de $\tan 2a$ en fonction de $\tan a$ pour a élément de $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})\}$.
3. Déduire de ce qui précède que $\tan \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
4. Soit l'équation (E) $\cos a - (\sqrt{2}+1)\sin a = 0$.
   (a) Montrer que (E) est equivalent à (E') : $\tan a = \sqrt{2} - 1$.
   (b) Résoudre (E'), puis en déduire les solutions dans $[0, 2\pi[$ de l'équation (E).

(c) Représenter les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.

5. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\tan a \geq \sqrt{2} - 1$.

Exercice 12

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$.
2. Déterminer deux nombres a et ϕ tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, on ait : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = a\cos(x - \phi)$.
3. (a) Utiliser les résultats des questions 1) et 2) pour résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'équation
   (E) : $(2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3)(\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0$.

   (b) Représenter les images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

Exercice 13

Soit A l'expression définie par $A(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$

1. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$. **(0,5pt)**
2. Exprimer $\sin 2x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. **(0,5pt)**
3. Montrons que $A(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ où a et b sont à déterminer. **(0,5pt)**
4. Montrer que $A(x) = a_1\cos(2x + \alpha)$ où a_1 et α sont à déterminer. **(1pt)**
5. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $A(x) = 1$ et représenter les images des solutions dans le cercle trigonométrique. **(1pt)**
6. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $A(x) \geq 1$. **(0,5pt)**

0.3 Fonctions

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer la dérivée f' et faire le tableau de variation de f.
3. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Résoudre graphiquement $-8 \leq x^2 - 6x \leq -5$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On note $(\mathcal{P})$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. • Déterminer les réel a, b et c pour que simultanément :
   • f présente un extremum sur $\mathbb{R}$ en $x_0 = 2$.
   • $(\mathcal{P})$ passe par $A(3; 1)$.
   • La tangente Δ à $(\mathcal{P})$ en A ait pour coefficient directeur -2.
2. Étudier la fonction f obtenue au 1.) : limites en $+\infty$ et $-\infty$, variation.

3. Représenter Δ et $(\mathcal{P})$.

Exercice 3

1. Déterminer les nombres réel a, b et c pour que l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$.
   - ait le point $I(-1; 2)$ comme centre de symétrie ;
   - admette, au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2x+6}{x+1}$.
   On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (a) Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   Préciser les asymptotes à $(\mathcal{C})$.
   (b) Étudier les variations de g et faire son tableau de variation.
   (c) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
   (d) Démontrer que le point $\Omega(-1; 2)$ est centre de symétrie à $(\mathcal{C})$.
   (e) Représenter $(\mathcal{C})$, (T) et ses asymptotes.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition Df de f et calculer les limites aux bornes de Df.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in Df$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
   Puis déduire une équation de l'asymptote oblique à la courbe (Cf) de f.
3. Calculer la dérivée f' de f puis établir le tableau de variation de f.
4. Existe t-il un point de (Cf) où la tangente à (Cf) est parallèle à l'asymptote oblique ?
5. Construire dans un même repère (Cf) et ses asymptotes.
6. En utilisant la courbe représentative de f, discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution(s) de l'équation $x^2 + (1-m)x + 4 - m = 0$.

Exercice 5

On considère la fonctions f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+1}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa représentations graphique dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) (unités : 1cm par axe).

1. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes de coordonnées (axe des abscisses et axe des ordonnées).
2. Montrer que $f(x) = x + 6 + \frac{4}{x+1}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
3. Étudier les limites de f en -1.
   En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale (**D**)
   dont on précisera l'equation.
4. Étudier les de f en $+\infty$ et en $-\infty$. $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle une asymptote horizontale ?

5. Démontrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on déterminera l'équation.
   Préciser la position relative de (Δ) par rapport à $(\mathcal{C}_f)$.
6. Montrer que f est dérivable sur son domaine. déterminer les variations de f et en déduire son tableau de variation.
7. Déterminer les des tangentes T_{-2} et T_{-3} aux points de la courbe d'abscisses respectives -2 et -3.
8. Montrer que le point $\Omega(-1;5)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
9. Tracer dans le repère : (D), (Δ), T_{-2}, T_{-3} et $(\mathcal{C}_f)$.
10. Déterminer suivant la valeur reel m le signe et le nombre de solution de l'equation $f(x) = m$
11. On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{x^2+7|x|+10}{|x|+1}$.
    Montrer que $g(x) = f(|x|)$.
    Tracé en pointillés (en bleu) la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de g à partir de celle de f dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique à variable réel x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x, \text{si} \;\; x \in]-\infty;1] \\ f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-3}, \text{si} \;\; x \in]1;3[\cup]3;+\infty[. \end{cases}$$

1. (a) déterminer le domaine de définition D_f de f.
   (b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
3. (a) Donner l'ensemble de dérivabilité de f.
   (b) Calculer la dérivée f' de f sur chacun des intervalles où elle est dérivable.
   (c) Étudier le sens de variations de$f$ et dresser son tableau de variation.
4. On note (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   (a) Montrer que (Γ)admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$ et une asymptote verticale (d) donc on déterminera les équations.
   (b) Construire (Δ),(d) et (Γ) ainsi que les demi-tangentes à (Γ) au point d'abscisse 1.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique à variable réel x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1, \text{si} \;\; x < 1. \\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, \text{si} \;\; x \geq 1. \end{cases}$$

1. (a) déterminer le domaine de définition D_f de f.

   (b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
3. (a) Donner l'ensemble de dérivabilité de f.
   (b) Calculer la dérivée f' de f sur chacun des intervalles où elle est dérivable.
   (c) Étudier le sens de variations de$f$ et dresser son tableau de variation.
4. On note (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (a) Montrer que (Γ)admet une asymptote horizontale (Δ) en $+\infty$ donc on déterminera une équation.
   (b) Construire (Δ), (Γ) ainsi que les demi-tangentes à (Γ) au point d'abscisse 1.

Exercice 8

1. Déterminer les nombres réels a, b et c, sachant que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^3 + bx + c$, est impaire et que le point $A(1, 2)$ est un extremum relatif pour sa courbe représentative.

2. Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x$
   On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) .
   (a) Étudier la parité de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
   (b) Étudier les variation de f et dresser le tableau de variation.
   (c) Soit (T) la tangente à (C) en O.
      i. Donner une équation de (T)
      ii. Étudier la position de (C) par rapport à (T).
   (d) i. Étudier la parité de la fonction f', dérivée de f
      ii. Soit α un réel non nul. Monter que les tangentes à (C) aux points A et A' d'abscisses respectives α et α', sont parallèles.
   (e) tracer la courbe (C) et la tangente (T).
   (f) Utiliser la courbe (C) pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $0 \leq -x^3 + 3x \leq 2$

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$. On note $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ sa courbe representative dans un repère $(O; I, J)$.

1. Étudier les limites de f en 1.Interpréter graphiquement les résultats.
2. (a) démontrer qu'il existe des réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
   (b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Démontrer que $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ dont on donnera l'équation.
   (c) Étudier les positions relatives de $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ et $(\mathcal{D})$.
3. Montrer que le point $I(1; 4)$ est centre de symétrie à la courbe $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ de f.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Déterminer les point d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
6. Représenter $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ et ses asymptotes.
7. Résoudre graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe de l' équation $x^2 + (2 - m)x + m - 4 = 0$
8. Construire dans le même repère la courbe $(\mathfrak{c}_\mathfrak{g})$ de $g(x) = f(-x)$.

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$. On note $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ sa courbe representative dans un repère $(O; I, J)$.

1. Étudier les limites de f en 1.Interpréter graphiquement les résultats.
2. (a) démontrer qu'il existe des réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
   (b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Démontrer que $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ dont on donnera l'équation.
   (c) Étudier les positions relatives de $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ et $(\mathcal{D})$.
3. Montrer que le point $I(1; 4)$ est centre de symétrie à la courbe $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ de f.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Déterminer les point d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
6. Représenter $(\mathfrak{c}_\mathfrak{f})$ et ses asymptotes.
7. Résoudre graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe de l' équation $x^2 + (2 - m)x + m - 4 = 0$
8. Construire dans le même repère la courbe $(\mathfrak{c}_\mathfrak{g})$ de $g(x) = f(-x)$.

Exercice 11 <u>**Partie A**</u> **(*fonctions numériques*)(5,5points)**

Soit f la fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dont le tableau de variation se représente comme suit :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

1. Donner le domaine de définition de f. Puis préciser les limites au bornes de son domaine de définition. **(1,25 pts)**
2. Résoudre l'equation $f'(x) = 0$ et en déduire le sens de variation de f. **(0,75 pt)**
3. Écrire les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ au points d'abscisses 1 et 3. **(0,75 pt)**
4. Préciser les points où f atteint ses extremas. **(0,5 pt)**

5. On pose $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$.
   (a) Calculer en fonction de a,b,c et d la dérivée de f. **(0,5 pt)**
   (b) Montrer que $d = -2$
   (c) Déterminer les coefficients a,b et c et donner l expression de f. **(1 pt)**
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique et une asymptote verticale qu l'on déterminera. **(0,75 pt)**
7. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'asymptote oblique.
8. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$

Exercice 12 Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

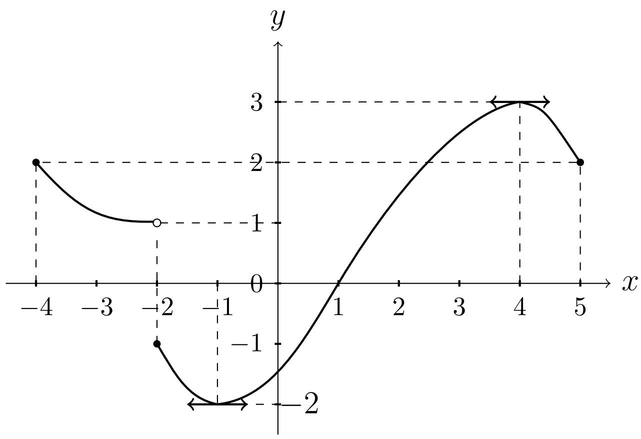
1. Calculer les limites de f à gauche de -2 ; à droite de -2 et en $+\infty$. **(0.75pt)**
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ et dresser son tableau de variation. **(0.75pt)**
3. Déterminer les points de rencontre de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = x$. **(0.75pt)**
4. Déterminer les points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et les axes. **(0.5pt)**
5. Écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse -1. **(0.5pt)** Soit h la fonction numérique définie par $h(x) = -\dfrac{1}{x}$.
6. Trouver les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+2}$. **(0.25pt)**
7. En déduire la construction de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Échelle : prendre 2cm pour 1 unité sur chaque axe. **(0.75pt)**
8. Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = -|f(x)|$
   (a) Donner le programme de construction de courbe $\mathcal{C}_g$. **(0.5pt)**
   (b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ dans le même repère que la courbe $\mathcal{C}_f$. **(0.5pt)**
9. $(U_n)_n$ est une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   (a) Calculer u_1 , u_2 et u_3. **(0.75pt)**
   (b) Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite. **(1.5pt)**
   (c) En déduire une conjecture sur le sens de variation et de la convergence. **(0.5pt)**

Exercice 13

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction numérique f de la variable réelle x, dérivable sur $[-4; -2[\cup] - 2; 5]$. Par lecture et à l'aide de vos connaissances :

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. 0.25pt

2. Déterminer les abscisses des points de la courbe de f où la tangente est parallèle à l'axe
   des abscisses. 0.5pt
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. 0.5pt
4. f est-elle continue en -2 ? justifier votre réponse. 0.75pt
5. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. 0.75pt
6. Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x \in [-4; -2[\cup]-2; 5]$. 1pt
7. Dresser le tableau de variation de f sur $[-4; 5]$. 0.5pt
8. reproduire sur votre feuille de composition la courbe de f et construire dans le même repère
   la courbe de la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$. 0.75pt



Exercice 14 (4.5 points)

p et q sont deux polynômes définis par : $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ (où a, b, et c sont des réels) et $q(x) = -2x^2 + 3x + 2$

1. (a) Montrer que $(\Delta) : x = \dfrac{3}{4}$ est un axe de symétrie à la courbe de q. (0.5pt)
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $q(x) = 0$. **(0.5pt)**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :
   $$\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 4x + 2y + z = 32 \\ z = 4 \end{cases}$$ **(0.5pt)**
3. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que -1 et 2 sont des racines de $p(x)$ et que la courbe de la fonction polyôme P passe par le point $A(0; 4)$. (0.75pt)
   (b) Montrer que $p(x) = 2(x + 1)(-2x^2 + 3x + 2)$. (0.5pt)
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{N}$, l'équation $p(x) = 0$. (0.75pt).
   (d) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $p(-1 + 2x) = 0$. (0.75pt)
   (e) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) < 0$. (0.5pts)

0.4 Suites numériques

Exercice 1

La suite (u_n) est définie par $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{3}$; et la suite (v_n) définie par $v_n = 2u_n - \frac{2n}{3}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison. (0.75pt)
2. Calculer u_2, u_3 et u_4 puis v_2, v_3 et v_4. (0.25pt×6)
3. Calculer v_n et u_n en fonction de n. (0.25pt×2)
4. Calculer la somme $S_n = v_1 + v_1 + v_2 + ... + v_n$. (0.5pt)
5. Quelle est la nature de la suite (S_n). (0.5pt)

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}$; et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$.

1. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n). (1pt)
2. (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison. (0.75pt)
   (b) calculer v_n et u_n en fonction de n. (0.75pt)
   (c) calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$. (0.5pt)

Exercice 5 On note $D =]-3; +\infty[$; f est la fonction définie sur D par : $f(x) = \frac{3x+4}{x+3}$.

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de D. **(0,5pt)**
   b) Étudier les variations de f sur D et dresser son tableau de variation. **(1pt)**
2. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) de f avec la droite d'équation $y = x$, (On pourra résoudre l'équation $f(x) = x$). **(0,75pt)**
   b) Représenter graphiquement la courbe (C). Unité sur les axes : 2cm. **(1pt)**
3. (U_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+4}{U_n+3} \end{cases} \tag{1}$$

pour tout entier naturel n.

a) Calculer U_1, U_2 *et* U_3. **(0,75pt)**

b) Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (U_n) et conjecturer la limite de cette suite. **(1,5pt)**

4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 2$.
   a) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{4-U_n^2}{U_n+3}$. **(0,5pt)**
   b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n). **(0,5pt)**

Exercice 6

I. On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 1000000 \\ U_{n+1} = 1,08U_n - 40000 \end{cases} \qquad V_n = U_n - 500\ 000$$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3 **1,5 pts**
2. (a) Déterminer le nombre réel a tel que pour tous naturel n, on ait $V_{n+1} = aV_n$. **0,5 pt**
   (b) En déduire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme V_0 et la raison q.
   (c) calculer V_n en fonction de n et en déduire l'expression de U_n en fonction de n. **1 pt**

II. Le 1^{er} décembre 1995, monsieur X avait placé 1000000 F dans une banque à un taux de 8% par an, à intérêts composés. Parallèlement, Monsieur X retire une somme de 0000F le 1^{er} décembre de chaque année pour préparer ses fêtes. Quelle somme aura Monsieur X dans sa banque le 1^{er} décembre 2001. **1 pt**

Exercice 7 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Le plan est muni du repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.
   (a) Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 4$ et $y = x$. **0.5pt**
   (b) Construire les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscises. **0.5pt**
   (c) Utiliser la construction pour conjecturer le sens de variation de (U_n) **0.5pt**
2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $V_n = U_n - 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique. **0.5pt**
   (b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n. **1pt**
   (c) En déduire la limite de la suite (V_n) puis celle de (U_n). **0.5pt**

Exercice 8

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer U_1 ; U_2 et V_1 ; V_2. **(1pt)**
2. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. **(0,5pt)**
3. En déduire l'expression de V_n et U_n en fonction de n. **(1pt)**
4. Quelle est la limite de de la suite U_n quand n tend vers $+\infty$. **(0,25pt)**
5. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$.
   (a) Déterminer la somme S_n en fonction de n. **(0,75pt)**
   (b) Déterminer la somme T_n en fonction de n. **(0,75pt)**
   (c) En déduire la limite de T_n quand n tend vers $+\infty$. **(0,25pt)**

0.5 Dénombrement

Exercice 1
Soit A et B deux ensembles finis tels que : $Card(A) = 9$, $Card(B) = 6$ et $Card(A \cup B) = 12$.
Calculer $Card(A \cap B)$ et $Card(A \setminus B)$.
Même questions si $Card(A) = 17$, $Card(B) = 24$ et $Card(A \cup B) = 25$.

Exercice 2
Soit A, B et C trois ensembles finis tels que : $Card(A) \neq 1$, $Card(A \times B) = 24$ et $Card(A \times C) = 15$. Détrerminer $Card(A)$, $Card(B)$ et $Card(C)$.

Exercice 3
Dans une classe sde première, sont étudiées les langues suivantes : anglais, chinois, allemand. Chaque élève étudie au moins une langue ; 5 étudie les trois langues, 7 l'anglais et l'allemand, 8 l'anglais et le chinois, 9 l'allemand et le chinois. En fin20 étudient (seulemnt l'anglais), 15 l'allemand et 18 le chinois. Quel est l'effectif de cette classe ?

Exercice 4 (2.25points)
18 élèves d'un lycée se rendent à l'hopital.

1. Calculer le nombre de façons de distribuer 18 carnets différents à ces élèves dans les cas suivants :
   (a) chaque élève reçoit un carnet ; (0.75pt)
   (b) chaque élève peut recevoir $0,\ 1, \cdots, 17$ ou 18 carnets. (0.75pt)
2. Pour chacun des 18 élèves, l'infirmière remplit une fiche dans laquelle, elle note le sexe, l'âge et le groupe sanguin. Déterminer le nombre maximum de fiches distinctes sachant qu'il existe 8 groupes sanguins. (0.75pt)

Exercice 5
Le chef d'un village dispose de quatre masques différents. Huit villageois seulement peuvent porter l'un ou l'autre des huit masques. Calculer le nombre de répartition possible.

Exercice 6
Quinze personnes se rencontrent. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre total de poignées de mlains échangées.

Exercice 7
Un jury est composé de dix membres pris dans une liste comportant 15 hommes et huit femmes. Combien peut-on former de jurys comprenant :

1. seulemnt des hommes ?
2. cinq hommes et deux femmes ?
3. au plus trois femme ?
4. au moins une femme ?
5. au moins deux hommes ?

Exercice 8

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 ≪couleurs≫ : Pique($\spadesuit$), Coeur ($\heartsuit$), Carreau($\blacklozenge$), Trèfle($\clubsuit$) contenant chacune l'As, le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8 et le 7 On tire simultanément 5 cartes de ce jeu. Calculer le nombre de tirages distincts dans les cas suivants :

1. Les cinq cartes sont quelconques ;
2. il y a exactement deux As ;
3. il y a au moins un As ;
4. les cinq cartes sont de la même couleur ;
5. il y a exactement trois As et deux Coeurs ;
6. le tirage contient les quatre couleurs ;
7. le tirage contient au un Coeur ;

Exercice 9

Une urne contient 12 boules numérotées de 0 à 11. On tire cinq boules de cette urne.

1. Combien peut-on obtenir de nombres distincts de cinq chiffres (dont le premier est non nul) dans chacun des cas suivants :
   (a) les cinq boules sont tirées successivement et sans remise ?
   (b) les cinq boules sont tirées successivement et avec remise ?
2. On tire simultanément cinq boules. Combien de tirages différents peut-on réaliser ?

Exercice 10

Une urne contient 6 boules numérotes 1 ; 1 ; 1 ; -1 ; 0 et 0. On tire simultanément deux boules de cette urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ? 0.25pt
2. On désigne par X la somme des numeros portés par les deux boules tirées.
   Déterminer le nombre de tirages dans les cas suivants : $X = 1$ et $X = -1$. 1pt

Exercice 11

Une urne contient 9 boules indiscernables au taucher et sur lesquelles on a marqué des numeros appartenant à trois groupes (groupe des numeros positifs, groupe des numeros négatifs et le groupe des numeros nuls). 5 boules ont des numeros négatifs, x ont des numeros positifs et y ont des numeros nuls où x et y sont des entiers naturels. On tire simultanément deux boules de l'urne et on marque par a et b les numereos obtenus. On désigne par (E) l'équation $(x^2 - a)(x^2 - b) = 0$

1. Déterminer le nombre de tirages possibles. (0.5 pt)
   Soit p le nombre de possibilités d'avoir deux boules de même groupe.
2. Calculer p en fonction de x et de y, puis en fonction de x seulement. (0.5pt×2)
3. Déterminer le nombre de boules du groupe des numeros positifs pour lequel p est minimale et donner cette valeur minimale. (0.5pt+0.25pt)
   On suppose dans toute la suite que $y = 2$.

4. Déterminer le nombre de tirages pour que (E) admette exactement trois solutions (0.5pt)
5. Déterminer le nombre de tirages pour que (E) admette au moins une solution. (0.5pt)

Exercice 12

On considère les ensembles $E = \{a; b; c; d; e\}$ et $F = \{1; 2; 3; 4\}$.

1. Combien existe-il d'application de E dans F ?
2. Combien existe-il d'applications injectives de E dans F ?
3. On suppose que $F = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Combein existe-il d'application bijectives de E dans F ?

Exercice 13

Dix personnes vont s'assoir autour d'une table ronde. De combien de manière peut-on faire assoire ces dix personnes :

1. Si les chaises sont numérotées ?
2. Si les chaises ne sont pas numérotées ?
3. Les dix personnes se trouvent dans une salle et, comme il se doit, se serrent les mains au début de la réunion.
   (a) Combien y a-t-il de poignées de mains ?
   (b) Sachant qu'il y a eu 5151 poignées de mains au début d'une réunion, combien y avait-il de personnes ?

Exrecice 14

Pour ouvrir un coffre-fort, on doit composer un code secret de cinq chiffres sur un tableau informatique de dix chiffres : 0, 1 ; 2 ; 3 ;$\cdots$;9.

1. Déterminer le nombre de code possibles.
2. Combien y a-t-il de codes commençant par 3 ?
3. Combien y a-t-il de codes ne contenant pas 0 ?
4. Répondre aux questions 1, 2 et 3 si les cinq chiffres sont deux à deux distincts.
5. Répondre aux questions 1, 2, 3 et 4 si les cinq chiffres sont suivis de deux lettres pris parmi les lettres de l'alphabet français.

Exercice 15

1. On veut partager équitablement une somme de 39 200F. Si deux enfants s'ajoutaient, la part que devrait revenir à chacun serait réduite de 2 240F. On note n le nombre d'enfants et x la part de chaque enfant. Déterminer le nombre ainsi que la part qui devrait revenir à chacun d'eux. **(1,5 pts)**
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $C_n^1 - C_n^2 = -5n$. **(0,5 pts)**
3. Une Urne contient 8 boules dont 5 rouges et 3 vertes. On tire au hasard et simultanément 2 boules de cette urne.
   (a) Déterminer le nombre de tirage possible. **(0,5 pts)**

(b) Déterminer le nombre de tirage possible dans chacun des cas suivants :

i. Les boules tirées ont la couleur rouge. **(0,5 pts)**

ii. Les boules tirées la couleur verte. **(0,5 pts)**

iii. Les boules tirées sont de la même couleur. **(0,5 pts)**

iv. Les boules tirées sont de couleurs différentes. **(0,5 pts)**

Exercice 16

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z=40 \\ x+y+z=30 \\ x+y+3z=46 \end{cases} \qquad \textbf{(1,5 pt)}$$

2. Dans un club de trois langues étrangères, à savoir l'allemand (A) ; le chinois (C) et le latin (L), il y'a 96 apprenants. 10 font les trois langues à la fois ; 50 étudient le chinois ; 40 le latin et 56 l'allemand. On sait aussi qu'il y'a autant qui apprennent seulement le latin que ceux qui étudient à la fois l'allemand et le chinois ; le nombre de ceux qui étudient à la fois l'allemand et le latin est la moitié de ceux pratiquant uniquement le chinois ; le nombre d'étudiant pratiquant uniquement l'allemand est le triple de ceux pratiquant à la fois le chinois et le latin.

   En posant x le nombre de personnes pratiquant à la fois l'allemand et le chinois, y le nombre de personnes pratiquant à la fois l'allemand et le latin et par z ceux pratiquant à la fois le chinois et le latin ;

   a) Montrer à l'aide d'un diagramme approprié que x,y et z vérifient le système (S) précedent. **(1,5pt)**

   b) En déduire le nombre d'apprenants qui étudient exactement une seule langue. **(0,75pt)**

3. Une porte est équipée d'une serrure à code comportant un dispositif muni des touches $1, 2, \dots, 9$ et des lettres A,B,C et D. Un code est formé de trois chiffres distincts puis de deux lettres non nécessairement distinctes. Combien de codes différents peut t-on former ? **(1,5pt)**

0.6 Statistiques

Exercice 0.

Un éleveur de moutons a classé ses bêtes selon leur poids et leur prix. Le tableau ci-après représente ces données :

Poids en kg	[15,25[	[25,35[	[35,45[	[45,55[	[55,65[	[65,75[
Prix en F	18 000	23 000	30 000	36 000	42 000	45 000
Effectifs	5	18	35	20	9	3

1. On constate que les poids sont regroupés en classes de même amplitude, quelle est cette amplitude ?

2. Représenter le nuage de points (x_i, y_i) où x_i désigne les centres des classes de poids et y_i les prix des moutons ; (échelles : 1 cm = 10 moutons sur l'axe des abscisses et 1 cm = 10000F sur l'axe des ordonnées).

3. Calculer le poids moyen X d'un mouton.
4. Calculer le prix moyen y d'un mouton.
5. En déduire les coordonnées du point moyen G.

Exercice 1.

On considère une série dont les effectifs cumulés décroissantes sont donnés dans le tableau qui suit :

Classe	[0,6[	[4,6[	[6,8[	[8,10[
Effectif cumulé décroissant	60	45	24	6

1. Construire le polygone des effectifs cumulés décroissants.
2. Déterminer graphiquement la médiane de cette série.
3. Calculer la moyenne de cette série.

Exercice 2.

Dans une entreprise, on a évalué la distance qui sépare le lieu de travail de 50 ouvriers de leurs domiciles. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Distance en km	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,16[	[16,20[
Effectif (n_i)	5	14	20	7	4
Centre des classes (x_i)	2				18
$n_i.x_i$	10				72

1. Quelle est la classe modale de cette série ?
2. Recopier et compléter le tableau tout en ajoutant la ligne des fréquences.
3. Calculer la distance moyenne.
4. Calculer la variance et l'écart type.
5. Quel est le pourcentage des ouvriers dont le domicile est à moins de 12km ?

Exercice 3.

Voici les tailles des élèves de la classe de première C de Moyopo :

Tailles en cm	[130 ;135[	[135 ;145[	[145 ;150[	[150 ;155[	[155 ;165[	[165 ;170[	[1
Effectifs	1	4	7	10	8	3	
Effectifs cumulés croissants							

On donnera les arrondis d'ordre zéro de tous les résultats.

1. (a) Déterminer le nombre total des élèves de cette classe.
   (b) Recopier et compléter sur votre feuille de composition le tableau ci-dessus.
   (c) Calculer la moyenne $\overline{x}$; l'écart type σ ; $\overline{x} - \sigma$ et $\overline{x} + \sigma$.
   (d) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants sur un papier millimétré.
2. (a) Lire graphiquement les effectifs cumulés respectifs dont la taille est inférieure respectivement à $\overline{x} - \sigma$ et $\overline{x} + \sigma$.
   (b) En déduire l'effectif cumulé dont la taille est dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma\,;\,\overline{x} + \sigma]$
   (c) Quel pourcentage de l'effectif total représente ce dernier effectif.

Exercice 4.

Les notes (/20) obtenues en mathématiques par des élèves de 1ère SE du College Moyopo et regroupées dans les classes $[0; 5[$, $[5; 8[$, $[8; 10[$, $[10; 12[$, $[12; 15[$, $[15; 20[$ ont permis d'obtenir la série statistique suivante :

Modalités	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	10	5	13	7	8	4

1. Quel est l'effectif de cette classe ? (on suppose que tous les élèves ont participé au devoir de maths).
2. Compléter le tableau en faisant apparaître : les centres de classes ; les amplitudes ; les densités ; les fréquences ; les ECC, ECD et FCC.
3. Représenter l'histogramme de cette série statistique.
4. (a) Représenter, sur des graphiques différents, les polygones des ECC et des ECD *(échelle graphique : 1 cm pour une note de 02 / 20 et 1 cm pour 10 personnes).*
   (b) En déduire, à l'aide d'une interpolation linéaire, le nombre d'élèves ayant obtenus une note supérieure à 09/20.
   (c) En déduire le nombre d'élèves ayant obtenus une note inférieure à 07/20.
   (d) En déduire le nombre d'élèves ayant obtenus une note comprise entre 07/20 et 09/20.
5. Déterminer les caractéristiques de position et de dispersion (variances et écart type) des séries statistiques.

Exercice 5.

Une enquête sur la durée des communications passées d'une cabine téléphonique a donné les résultats suivants :

Classes	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[
Effectifs	30	54	51	45	63	57

1. Construire un histogramme représentant cette série.
2. Dresser le tableau des ECC et ECD, puis construire les polygones des ECC et ECD.
3. A l'aide d'interpolations linéaires, déterminer le nombre de communication dont la durée est :
   (a) supérieure à 4 minutes.
   (b) inférieure à 7 minutes.
   (c) comprise entre 4 et 7 minutes.
4. Déterminer les caractéristiques de position et de dispersion (variances et écart type) des séries statistiques.

Exercice 6.

Les notes des élèves d'une classe de 1ère D, reparties suivant leur performance au cours d'une évaluation, sont représentées dans le tableau ci-dessous :

Notes	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Effectifs	19	21	15	25	8	7

N.B : On donnera les valeurs approchées des résultats à 10-2 près par excès.

1. Déterminer la classe modale de cette série statistique.
2. Construire l'histogramme des effectifs.
3. Calculer son mode, sa moyenne et sa médiane.
4. Calculer la variance et l'écart type.

Exercice 7.

Pour être vendues, les pommes doivent être calibrées. Elles sont réparties en caisse suivant leur diamètre. Un producteur a évalué le nombre de pommes pour chacun des calibres rencontrés dans le lot. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Calibre en mm	[55 ; 60[	[60 ; 65[	[65 ; 75[	[75 ; 85[	[85 ; 90[
Nombre de pommes	258	133	164	108	337

1. Construire sur un même graphique les diagrammes cumulatifs croissants et décroissants de cette série statistique.
2. Déterminer graphiquement la médiane de la production.
3. Déterminer le calibre moyen de la production.
4. Déterminer le nombre de pommes dont le calibre est compris entre 65mm et 80mm.

Exercice 7.
Le tableau ci-dessous donne les notes obtenues en mathématiques par tous les élèves d'une classe de 1ère.
3 4 3 6 9 10 15 17 11 14 7 8 4 5 7 4 7 11 15 13 11 10 7 8 13 14 5 9 8 10 13 5 9 8 4 11 8 10 10 14 12 10 12 13 12 11 15 3 14 10 16 3 6 8 14 4 8 9 12 14 13 11 11 10 17 16 6 12 10 15 3 10 10 16 10 10 15 11 6 13 12 4 2 15 11 13 4 3 15 11 4 11 12 4 7 6 17 3 8 5 9 13 8 9 8 10 10 10 9 13 11 15 11 10 11 10 15

Partie A

1. Déterminer la série statistique des notes que ce tableau définit.
2. Représenter cette série par un diagramme en bâtons.
3. Construire le diagramme cumulatif croissant de cette série.
4. Déterminer les paramètres de position de cette série. 5. Déterminer les paramètres de dispersion de cette série.

Partie B

1. Regrouper les notes du tableau ci-dessus dans les classes suivantes : [0 ; 4[, [4 ; 10[, [10 ; 14[, [14 ; 20[et calculer la fréquence de chacune des classes.
2. Représenter cette série par un histogramme.
3. Construire le diagramme des ECC et celui des ECD de cette série.
4. Déterminer les paramètres de position (mode, médiane et moyenne) de cette série.
5. Déterminer les paramètres de dispersion (variance et écart type) de cette série.

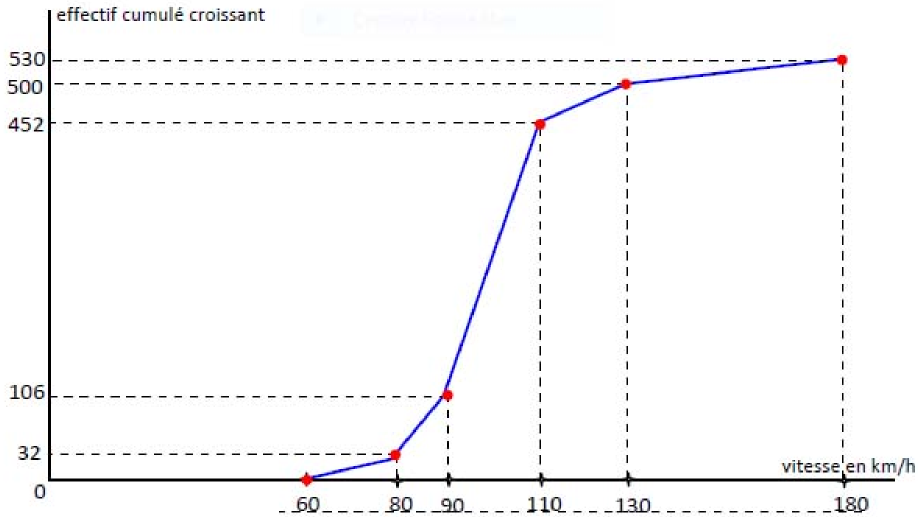
Partie C
Regrouper les notes du tableau ci-dessus dans les classes suivantes : [0 ; 8[, [8 ; 10[, [10 ; 12[, [12 ; 16[, [16 ; 20[
Reprendre toutes les questions de la partie B.

Partie D

1. Comparer les moyennes obtenues dans les trois premières parties.
2. Comparer les écarts types obtenues dans les trois premières parties.
3. Commenter et comparer ces trois études d'un même caractère sur une même population.

Exercice 8.
Un contrôle de vitesse a été effectué sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km/h. La série statistique obtenue est représentée ci-dessous par son polygone des effectifs cumulés croissants.

1. Établir le tableau des effectifs de cette série statistique.
2. (a) Quel est le pourcentage de véhicule en infraction ?
   (b) On a décidé de ne verbaliser que les conducteurs roulant à une vitesse strictement supérieure à 140 km/h. Combien d'amendes va-t-on donner ?
3. Déterminer la classe modale et la moyenne d cette série.



Exercice 9.

Dans un pays africain, l'indice de production industrielle calculé à la fin de chaque année, a évolué comme suit au cours de cinq années consécutives.

Année X_i	1	2	3	4	5
Indice Y_i	248	228	201	208	174

1. Représenter le nuage de points associés à cette série statistique double.
2. Calculer l'indice moyen $\overline{Y}$ obtenu en cinq ans.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire et dire si un ajustement linéaire se trouve justifié.
4. Écrire une équation de la droite (D) de regression de y en x.

Exercice 9.

L'évolution de 1998 à 2004 du salaire moyen d'un ouvrier est donné dans le tableau suivant :

Numéro de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Salaire horaire moyen en FCFA : y_i	1650	1760	1930	2020	2220	2450	2530

1. Représenter les nuages des points associés à la série double (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormal, ainsi que le point moyen G du nuage, puis ajuster à la règle ce nuage de points.
   On calculera les coordonnées de G.
2. Donner une troncature d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire. Que peut-on conclure ?
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en fonction de x.

4. En admettant que cette évolution se poursuive, donner une estimation du salaire horaire moyen
d'un tel ouvrier en l'an 2010.

Exercice 10.
Voici l'évolution du tirage d'un journal durant les sept premiers mois de son apparition.

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7
Tirage y_i	6	4	6	8	10	10	12

1. (a) Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points associé à cette série statistique
   Échelle : 0.5 cm pour un millier et 1 cm pour 1 mois.
   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
2. Donner par la méthode des moindres carrées, les équations de la droite de régression de y en x, et de la droite de régression de x en y.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Puis interpréter le résultat obtenu.
4. En supposant que l'évolution du tirage de ce journal se poursuive ainsi dans les prochains mois, estimer le tirage lors du dixième mois et le numéro du mois correspondant au tirage de 25.000 exemplaires.

Exercice 11.
On donne un système d'axes perpendiculaires et huit points $M_i(x_i, y_j)$ dont les coordonnées sont fournies par le tableau suivant :

x_i	2	4	5	7	10	14	17	18
y_i	0	1	1	2	6	11	14	17

1. (a) Construire le nuage de points.
   (b) Calculer les coordonnées des points moyens M_1 et M_2 respectivement des 4 premiers points et des quatre derniers points.
   (c) En déduire une équation de la droite (D) de régression de y en x.
2. (a) Calculer les valeurs ajustées de y pour $x = 0$; $x = 11$; $x = 20$.
   (b) Tracer la droite (D) dans le même repère.

Exercice 12.
Le tableau ci-dessous indique la puissance x en chevaux et la cylindrée y (en cm^3) de huit voiture à moteur Diesel.

Numéro voiture	1	2	3	4	5	6	7	8
Puissance x	35	55	60	60	65	70	72	75
Cylindrée y	1000	1600	1800	1700	1900	2000	2100	2500

1. (a) Représenter le nuage de la série $(x; y)$. (Choisir sur l'axe des abscisses 1cm pour 10 chevaux et sur l'axe des ordonnées 2cm pour 1000 cm^3).
   (b) Le nuage ainsi représenté laisse-t-il entrevoir un ajustement linéaire ?
2. Calculer la puissance moyenne et la cylindrée moyenne des huit voitures.
3. Sachant que la covariance du couple $(x; y)$ vaut 4662.5 :
   (a) Écrire une équation cartésienne de la droite de régression de x en y.
   (b) Donner une estimation au cheval près de la puissance d'un moteur de cylindrée $3500cm^3$.

Exercice 13.

Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuelles d'une grande entreprise ont donné en 1992 la nomenclature suivante après une étude statistique ; les montants étant exprimés en dizaines de millions de francs CFA :

x_i	12	17	11	13	31	20
y_i	99	130	92	108	232	150

1. Construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ pour $1 \leq i \leq 6$
   dans le plan muni d'un repère orthogonal.
2. Determiner la droites de regression de y en x par la méthode des moindres carres.
3. Calculer le coefficient de correlation linéaire Γ de la série statistique.

Exercice 14.

Madame YOUGO est soumise à un régime alimentaire. Le tableau ci-dessous donne son poids à l4issue des 6 premiers contrôles hebdomadaires.

Numéros des semaines (x_i)	1	2	3	4	5	6
Poids en kg (y_i)	100	98	96	96	95	94

1. Calculer son poids moyen au cours des 6 semaines.
2. Représenter le nuage de points de la série double (x, y) dans un repère convenablement choisi.
3. Donner une équation de la droite de Mayer de cette série.
4. Conformément à la taille de Madame YOUGO, des experts affirment qu'elle aura un poids normal en kg lorsque y sera dans l'intervalle $[66; 86]$. A l'aide de l'ajustement de Mayer, dans quel intervalle de temps en semaines pourra-t-elle avoir un poids normal ?

Exercice 15.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des masses et des tailles d'enfants à leur naissance. (On a relevé la masse et la taille de 10 nouveau-nés).

x (masse en kg)	2,4	2,6	2,7	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	3,8	4,0
y (taille en cm)	45	47	48	50	51	52	53	54	54	56

1. Représenter le nuage de points et le point moyen G associé à cette série statistique dans un repère orthogonal adapté aux données.
   (unité sur les axes : abscisses 0,5 cm pour 0,1 kg, ordonnées 0,5 cm pour 1 cm ; on fera une rupture d'axes et commencer la graduation à 2,4 kg pour x et à 45 cm pour y).
2. A l'aide de la méthode de Mayer, déterminer l'ajustement linéaire de y en x.
3. Donner une estimation de la taille d'un enfant ayant pour masse 2 kg.

Exercice 16.

Le tableau suivant donne le poids x en grammes et y la taille en centimètre en fonction du poids d'une population donnée :

Poids x	10	25	40	50	55	60	65	70	75	80
Taille y	11	20	35	45	50	53	60	63	73	75

1. Représenter le nuage des points dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   1 cm pour 10 g et 1 cm pour 10 cm
2. Déterminer le point moyen G de ce nuage.
3. La série ci-dessus est divisée en deux sous séries :

   Sous série A

Poids x	10	25	40	50	55
Taille y	11	20	35	45	50

   Sous série B

Poids x	60	65	70	75	80
Taille y	53	60	63	73	75

(a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 , points moyens respectifs des sous séries A et B

(b) Placer les point G_1 et G_2 et tracer la droite (G_1G_2) dans le repère orthogonal précédent Que représente cette droite pour la série étudiée ?

(c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (G_1G_2).

4. A l'aide de l'équation de la droite (G_1G_2) obtenue, estimer :
   (a) la taille d'une personne ayant un poids de 97 grammes.
   (b) Le poids d'une personne de taille 151 cm.

Exercice 17

En prévision du lancement d'un nouveau produit au Cameroun, une société Française a mené une enquête au près des entreprises Camerounaises pour fixer le prix de vente de ce produit. Les résultats sont dans le tableau ci-dessous.

Prix en euros	9	10	11	12	13	14	15	16
Nombre y_i d'éventuels acheteurs	120	100	100	70	60	50	40	30

1. Représenter par un tableau à double entré. **(0,25 pt)**
2. Représenter le nuage des points associés à cette série double.(unité : 1cm pour un euro sur l'axe de abscisses et 1cm pour 10 acheteurs suir l'axe des ordonnées). **(0,75 pt)**
3. Calculer les coordonnées du point moyen et le placer. **(0,75 pt)**
4. calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série et en déduire si un ajustement linéaire est justifié. **(1 pt)**
5. Écrire une équation de la droite de régression de y en x et en déduire à peu près combien d'individus acheteraient ce produit à 20euros . **(1,5 pts)**

0.7 Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1

1. Écrire le vecteur $v = (1; -2; 5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1; 1; 1), e_2 = (1; 2; 3)$ et $e_2 = (2; -1; 1)$.
2. Écrire le vecteur $v = (2; -5; 3)$ de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1; -3; 2), e_2 = (2; -4; -1)$ et $e_2 = (1; -5; 7)$.
3. Pour quelle valeur de k le vecteur $u = (1; -2; k)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs
   $v = (3; 0; 2)$ et $w = (2; -1; -5)$?
4. Écrire le polynôme $v = t^2 + 4t - 3$ comme combinaison linéaire des polynômes
   $p_1 = t^2 - 2t + 5, p_2 = 2t^2 - 3t$ et $p_3 = t + 3$.
5. Écrire le matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ sous la forme de combinaison linéaire des matrices
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Calculer $u+v$ dans chacun cas et déterminer si u et v sont ou non linéairement dépendants.

1. $u = (3; 4)$ et $v = (1; -3)$.
2. $u = (2; -3)$ et $v = (6; -9)$.
3. $u = (4; 3; -2)$ et $v = (2; -6; 7)$.
4. $u = (-4; 6; -2)$ et $v = (2; -3; -1)$.
5. $u = 2 - 5t + 6t^2$ et $v = 3 + 2t - 4t^2$.
6. $u = 1 - 3t + 2t^2$ et $v = -3 + 9t - 6t^2$.

Exercice 3

1. Soit V l'espace des matrices 2×2 (2 lignes et 2 colones) sur $\mathbb{R}$. Déterminer si les matrices $A, B, C \in V$ sont dépendants.
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soient u, v, w des vecteurs indépendants, montrer que $u + v, u - v$ et $u - 2v + w$ sont aussi indépendants.

Exercice 3

1. Soit E un espace vectoriel réel et f l'application telle que $f : E \longrightarrow E, u \longmapsto ku$ ($k \in \mathbb{R}^*$). Montrer que f est une application linéaire.
2. Soit E un espace vectoriel réel rapporté à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. soit f l'application telle que $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} & \mapsto & 2x + y \end{array}$. Montrer que f est une forme linéaire.
3. l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x + 3y - 1 \end{array}$ est-elle linéaires ?
4. Dans chacun des cas suivants, déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
   (a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y; x - y) \end{array}$
   (b) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} & \mapsto & (x + y)\overrightarrow{i} + (2x + 2y)\overrightarrow{j} \end{array}$
   (c) $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x - y \end{array}$

Exercice 4

Soit f un endomorphisme de E_2 tel que $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

1. Déterminer l'image de $\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
2. Soit g un autre endomorphisme de E_2 définie analytiquement par $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + y \\ y' = 2x + y\sqrt{3} \end{cases}$
   Déterminer la matrice $M(g)$ de g et en déduire l'image de $\overrightarrow{i}$ et celle de $\overrightarrow{j}$.

3. Soit f un endomorphisme de E_2 de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{v}$.
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E_2.
   (b) Exprimer la matrice M' de f dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
4. Soit h un endomorphisme de E_2 défini analytiquement par $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2x + y \end{cases}$
   (a) Montrer que h est un endomorphisme de E_2.
   (b) Déterminer la définition analytique de h^{-1}.

Exercice 5

On considère le plan vectoriel E. Soit $b = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de E et f un endomorphisme de E dont le matrice dans b est défini par $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que $f \circ f = \theta$, où θ est l'endomorphisme nul de E. En déduire que f n'est par bijective.
   (b) Déterminer le noyau E_1 de f.
   (c) Déterminer l'image E_2 de f.
   (d) Comparer E_1 et E_2.
2. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de E_1.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ de E tel que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$.
   (b) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E.
   (c) Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 6

On considère deux réels non nuls a et b et h l'endomorphisme du plan vectoriel E_2 défini par :
$f(\overrightarrow{i}) = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{j}) = (1-a)\overrightarrow{i} + (1-b)\overrightarrow{j}$. $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ étant une base de E_2.

1. Déterminer la nature de h dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. En déduire que :
   (a) Pour $a - b \neq 0, Ker(h) = \{0\}$
   (b) Pour $a - b = 0, Ker(h)$ est une droite vectorielle dont on précisera la base et une équation cartésienne.
3. On suppose que $a = b = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Montrer que h est involutive (h est involutive si et seulement si $h \circ h = h$).
   (b) Montrer que $Ker(h)$ et $Im(h)$ sont des droites vectorielles de bases respectives e_1 et e_2.
   (c) Montrer que (e_1, e_2) est une base de E_2 et en déduire la nature de h dans la base (e_1, e_2).

Exercice 7
E_2 est un espace vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ g est l'endomorphisme de E_2 définie par $g(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $g(\vec{\jmath}) = \vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}$

1. Donner la matrice de g dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. **0.25pt**
2. Soit $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ un vecteur de E_2. $g(\vec{u}) = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$ son image par g.
   (a) Déterminer $g(\vec{u})$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. **0.25pt**
   (b) En déduire l'expression analytique de g. **0.25pt**
3. (a) Déterminer $\ker g$ et en déduire une base de $\ker g$. **0.75pt**
   (b) Déterminer Img et déduire une base de Img. **0.75pt**

Exercice 8
E_2 est un espace vectoriel de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, g est l'endomorphisme de E_2 définie par $g(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $g(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$

1. Donner la matrice de g dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. 0.25pt
2. Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ un vecteur de E_2. $g(\overrightarrow{u}) = x'\overrightarrow{j} + y'\overrightarrow{j}$ son image par g.
   (a) Déterminer $g(\overrightarrow{u})$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. 0.25pt
   (b) En déduire l'expression analytique de g. 0.25pt
3. (a) Déterminer $\ker g$ et en déduire une base de $\ker g$. 0.75pt
   (b) Déterminer Img et déduire une base de Img. 0.75pt

0.8 géométrie de l'espace

Exercice1
L'ensemble $\mathcal{V}$ est muni de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{5}{2}\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ sont colinéaires.

Exercice2
Dans chacun des cas suivants dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires. Préciser sa valeur.

1. $\overrightarrow{u}(1; 2; 3)$ et $\overrightarrow{v}(\lambda; 5; 0)$
2. $\overrightarrow{u}(2\lambda - 5; 19 - 4\lambda; -3)$ et $\overrightarrow{v}(6; 15; -6(\frac{\lambda}{7} + 2))$
3. $\overrightarrow{u}(1; -2; 5)$ et $\overrightarrow{v}(\lambda; 1; 0)$.
4. $\overrightarrow{u}(5; 1; 3)$ et $\overrightarrow{v}(4 + \lambda; \lambda; 2\lambda + 1)$

Exercice3
Dans chacun des cas suivants trouver le nombre réel a pour le quel les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

1. $\overrightarrow{u}(-1; -1; 1)$, $\overrightarrow{v}(1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{w}(-1; 0; a)$
2. $\overrightarrow{u}(1; -1; 1)$, $\overrightarrow{v}(1; 1; -1)$ et $\overrightarrow{w}(2; 1 + a; -3)$
3. $\overrightarrow{u}(-2; 3; -4)$, $\overrightarrow{v}(1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{w}(0; 1; a)$

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On donne $A(-1;1;-1)$, $B(0;1;0)$ et $C(2;1;1)$.

1. Monter que les points A, B et C sont non alignés.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
3. Déterminer une valeur approchée en dégré, des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, et $\widehat{ACB}$.
4. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC), puis en déduire une équation cartésienne du plan (ABC)
5. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 5

On donne les points $A(1;2;-1)$ et $B(0;1;3)$, et le vecteur $\overrightarrow{u}(1;2;-1)$.

1. Établir une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$. Quel est la nature de cet ensemble ?

Exercice 6

L'espace $\mathcal{E}$ est muni de la base orthonormé directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(1;2;1)$, $B(2;1;2)$ et $C(4;5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Trouver les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\overrightarrow{u}$ soit unitaire colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v}$ soit unitaire colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de sens contraire à $\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base orthonormée directe.
4. Déterminer le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{w}$.
5. Placer dans l'espace $\mathcal{E}$ les points A, B, C et D.

Exercice 6

Soit $ABCDEFGH$ un cube dont la mesure d'une arête est a.

1. Calculer en fonction de a la distance de G au plan (ABC).
2. Démonter que les droites (AC) et (BF) sont orthogonales.
3. Démonter que la droite (BE) est orthogonale au plan (ADG).
4. Démonter que les plans (ABC) et (EAC) sont perpendiculaires .
5. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 7 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on donne le point $A(4;-3;5)$ et le plan (P) d'équation cartésienne : 3x-2y+z+5=0

1. Déterminer un vecteur normal au plan (P). (0.25pt)

2. Soit (D) la droite passant par A et orthogonale à (P).
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de (D) (0.5pt)
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de la droite (D) et du plan(P). (0.75pt)
   (c) En déduire de deux manières différentes la distance de A à (P). (1pt)

3. Déterminer une représentation paramétrique de (P) (0.5pt)

Exercice 8

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par le point $A(9, 2, 1)$ et parallèle au plan $(P) : 2x + y + 2z + 3 = 0$. 0.75pt
2. Soit $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 6 = 0$ et le plan $(\Pi) : z = 2$.
   (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{E})$. 0.5pt
   (b) Déterminer l'intersection de $(\mathcal{E})$ avec le plan (Π). 0.5pt
3. Soit (Π') le plan d'équation $2x + y - 2z + 5 = 0$.
   (a) Étudier la position relative de (Π') et le plan $(Q') : x - 2y + z - 3 = 0$. 0.5pt
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $B(1, -2, 2)$ et orthogonale à (Π'). 1pt

Exercice 9

$ABCDEFGH$ est un cube.

1. Déterminer dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ une équation cartésienne du plan (BDE) et une représentation paramétrique de la droite (AG).
2. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) et le coupe en un point I tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

Exercice 10

On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; puis le vecteur $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points M vérifiant :

1. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{V} = 3$, quelle est la nature de cet ensemble ?
2. $MA^2 - MB^2 = 6$, quelle est la nature de cet ensemble ?
3. $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 12$, quelle est la nature de cet ensemble ?

Exercice 11

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.
   En déduire que si (AB) est orthogonale à (CD) et (AC) orthogonale à (BD) alors (AD) est orthogonale à (BC).

Exercice 12

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier :
On pose $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{h}$.
On désigne par I, J et K les points définis par :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{h}$

1. Justifier que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{h})$ est une base.
2. Déterminer dans cette base un couple de vecteurs directeurs du plan (IJK).
3. Démontrer que la droite (CD) et le plan (IJK) sont sécants. Déterminer alors les coordonnées de leur point d'intersection E, dans le repère $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{h})$
4. Soit F le barycentre de $(B, -1)$ et $(D, 2)$. Démontrer que le point F appartient au plan (IJK).
5. Soit G barycentre de $(I, -1)$ et $(J, 2)$.
   Démontrer que G est le point d'intersection des droites (BC) et (EF).

Exercice 13

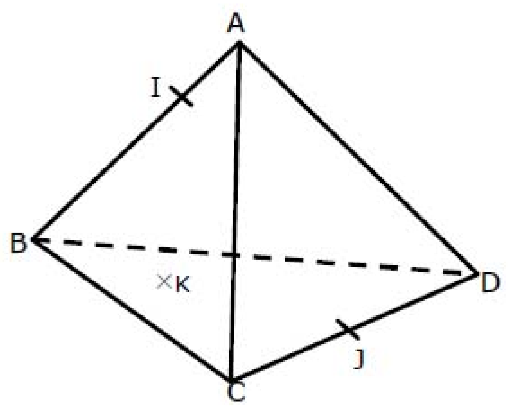
$ABCDEFGH$ est un cube. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BF]$; $[FG]$; $[AE]$.
Démontrer que :

1. La droite (IK) est orthogonale au plan (ADE).
2. La droite (BE) est orthogonale au plan (ADG).
3. La droite (DE) est orthogonale au plan (IJK).
4. La droite (IK) et (CF) sont orthogonales .
5. La droite (IJ) et (ED) sont orthogonales.

Exercice 14

On considère un tétraèdre $ABCD$; I et J deux points des arêtes

1. Démontrer que les plans (ABK) et (ACD) sont sécants et tracer leur intersection.
2. Tracer, sur une autre figure, la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJK).

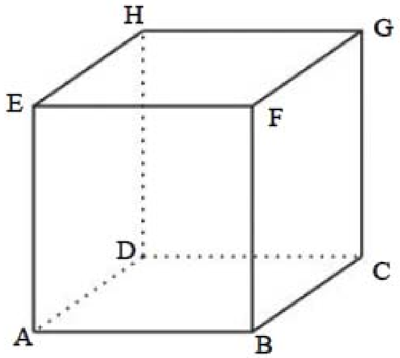


L'espace affine Euclidien $\mathbb{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère : les points A et B de coordonnées respectives $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 2)$.

Le vecteur $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
Le plan P contenant B et orthogonal a D en un point C

1. Écrire une équation cartésienne de P.
2. (a) Calculer les coordonnées de C.
   (b) En déduire la distance du point B à la droite D.

Exercice 15



La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.

1. En utilisant le produit scalaire et l'égalité $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$,
   démontrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (CFH).
2. On suppose que $AB = 1$ et on pose $AB = \overrightarrow{i}$, $AD = \overrightarrow{j}$ et $AE = \overrightarrow{k}$
   Démontrer que $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé de l'espace
3. (a) Déterminer dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{FH}$.
   (b) Retrouver le résultat de la question 1.
   (c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AG) et (CFH) et en déduire la distance du point A au plan (CFH).

Exercice 16

Soit $ABCDEFGH$ un cube dont la mesure d'une arête est a. On designe par I, J et K les milieux respectifs des segment $[BF]$, $[FG]$ et $[AE]$.

1. Calculer en fonction de a les distances suivantes : $d(G,(ABC))$; $d(G,(DBF))$; AG.
2. Démonter que les droites suivantes sont orthogonales : (AC) et (BF) ; (IK) et (CF) ; (IJ) et (ED).
3. Démonter que $(BE)\perp(ADG)$; $(IK)\perp(ADE)$; $(DE)\perp(IJK)$.
4. Démonter que les plans suivants sont perpendiculairs : (ABC) et (EAC) ; EAC et HDB ; FCH et AGE.

Exercice 17

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On designe par I, J et K les milieux respectifs des segment $[AE]$, $[CG]$ et $[BC]$.

1. Démontrer que le plan (DBF) est le plan médiateur du segment $[IJ]$.
2. Démontrer que I, J et K appartiennent au plan médiateur du segment $[DF]$.
3. Quel est le plan médiateur du segment $[DG]$?

Exercice 6

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, I et J les miliesux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. Démontre que le plan (ICD) est le plan médiateur de $[AB]$.
2. Démontrer que le plan (JAB) est le plan médiateur de $[CD]$.
3. En déduire que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
4. (a) Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. Démontrer que l'ensemble des points équidistants des points A, B et C est la droite (Δ) passant par O et orthogonale au plan (ABC). *Cette droite est appelée axe du cercle* $\mathcal{C}$
   (b) Démontrer que le plan médiateur de $[AD]$ et l'axe (Δ) sont sécants.
   (c) En déduire qu'il existe un seul point de l'espace équidistant des points A, B, C et D. *Ce point est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* $ABCD$

Ministère des Enseignements Secondaires **Examen : Séquence 2**
Lycee Classique de Bafoussam **Session : Nov 2015**
Série : $1^{\textbf{ère}}$ D_1/D_2
Épreuve :
Mathématiques
Durée : 3h
Coef : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 *à* 2.
NB : La qualité de la rédaction sera prise en compte

Exercice 1 : **(2.75 points)**
On donne : $Q(x) = -3x^2 + (2 - 3\sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$.

1. Montrer que Q admet deux racines distinctes réelles. **(0.5pt)**
2. Sans toute fois calculer les racines de Q, déterminer en justifiant la somme et le produit de ces racines. **(0.5pt)**
3. Montrer que $-\sqrt{3}$ est une racine de Q. **(0.5pt)**
4. Déduire des questions précédentes, l'autre racine de Q. **(0.5pt)**
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $Q(x) > 0$. **(0.75pt)**

Exercice 2 **(4.25 points)**
f et g sont deux polynômes définis par : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ et $g(x) = 2x^2 + 9x + 4$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$. **(0.5pt)**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :
$$\begin{cases} x - y + z = 11 \\ 4x + 2y + z = -16 \\ 16x - 4y + z = 128 \end{cases}$$ **(0.75pt)**
3. Déterminer a, b et c sachant que 2 et -4 sont racines de f et que $f(-1) = 9$. **(1pt)**
4. (a) Montrer que $f(x) = (x - 2)(2x^2 + 9x + 4)$. **(0.5pt)**
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. **(0.5pt)**
   (c) Donner suivant les valeurs de x le signe de $f(x)$. **(0.5pt)**
   (d) En déduire la solution de l'inéquation $f(x) \leq 0$. **(0.5pt)**

Exercice 3

1. Sans développer, déterminer le signe des polynômes suivants et de leurs discriminants.
   (a) $p(x) = -2[(x + 3)^2 + 4]$ **(0.5pt)**
   (b) $q(x) = 2(x + 1)^2$ **(0.5pt)**
   (c) $t(x) = -3(x - \frac{1}{8})^2$ **(0.5pt)**
   (d) $s(x) = \frac{1}{4}[(x + \frac{3}{4})^2 + 1]$ **(0.5pt)**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $\sqrt{2x - 3} = x - 2$. **(0.5pt)**

Problème (11.5points)
Le problème comporte deux parties A et B indépendantes

Partie A (7points)
Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3} \end{array}$$

.

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. (0.5**pt**)
2. Déterminer sa bijection réciproque. (0.5**pt**)
3. Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes de coordonnées. **(0.5pt)**
4. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x-3} + b$. (0.5**pt**)
5. En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ est l'image de la courbe de la fonction $g(x) = \dfrac{a}{x}$ par une transformation simple que l'on précisera. (0.75**pt**)
6. Montrer que $\Omega(3; b)$ est un centre de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$. **(0.5pt)**
7. Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de g, puèis celle de f dans le même repère. (1.5**pt**)
8. En déduire la courbe de la fonction g_1 définie par : $g_1(x) = |g(x)|$. (0.5*pt*)

Partie B
Le plan est muni du même orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soient $A(1; -3)$ et $B(1; 3)$ deux points du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point I du plan milieu du segment $[AB]$. **(0.5pt)**
2. (a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$. **(0.75pt)**
   (b) En déduire la nature de Γ, ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$ **(0.75pt)**
   (c) Construire Γ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ **(0.25pt)**
3. On considère l'application h qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{IM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$. **(0.5pt)**
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application h. **(0.5pt)**.
   (c) Quelle est l'image de Γ par h ? **(0.5pt)**
4. Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. **(0.5pt)**
5. Γ rencontre l'axe (Ox) en deux points C et D, et coupe la parallèle à l'axe (Oy) passant par I
   en deux points E et F .
   (a) Donner les coordonnées des ponts C, D, E et F **(1pt)**
   (b) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $CDEF$ **(0.75pt)**
   (c) Calculer son aire **(0.25pt)**

Le travail a toujours fait de nous le meilleur de tous (d'après Schwarz).