GROUPE POLYVALENT CORPORATION CENTRE DE PRÉPARATION AUX EXAMENS OFFICIEL ET AU CONCOURS D'ENTRE DANS LES GRANDES ÉCOLES ET FACULTÉS DU CAMEROUN

Mathématiques

Terminale C

THEME : ARITHMETIQUE

TRAVAUX DIRIGES N° 1

Diversité des formes de raisonnement en arithmétique

1) **Le raisonnement exhaustif** qui nécessite d'étudier tous les cas une première étude consiste à faire un tri afin si possible de restreindre cet inventaire. **application (voir questions test N° 1et 2)**
2) **Le Raisonnement par disjonction des cas** à la différence du raisonnement exhaustif ici les situations sont différenciées par un ou plusieurs paramètres
   La proposition introduit un ensemble de nombres à examiner selon les critères
   La proposition introduit des situations s de comparaison par l'ordre naturel des nombres ou par l'ordre de la divisibilité **application (voir questions test N° 3)**
3) **Le Raisonnement par récurrence** pour des expressions n'ayant pas une formule explicite et dont la valeur de vérité porte une infinité d'entiers naturels ici on dispose d'une hypothèse de récurrence on la vérifie au premier rang on la suppose vrai au rang et n et on montre quel l'est aussi au rang n+1 **application (voir questions test N° 4 et 5)**
4) **Le Raisonnement par l'absurde** ici on veut prouver qu'une proposition P est vraie sous certaines hypothèses. Si la négation de P entraine une contradiction avec les hypothèses, alors cette négation n'est pas possible donc P est vrai **Application (voir questions test N° 6)**
5) **Le Raisonnement par contraposition** lorsqu'il s'agit de démontrer une implication, on suppose le contraire de la conclusion et on prouve que la conclusion est la négation de l'hypothèse. C'est un raisonnement par l'absurde particulier « non B implique non A » équivaut a « A implique B » **Application (voir questions test N° 7)**

CONTACTEZ-NOUS :
Tel :653210855 / 695178532
Fb :polyvalent corporation

TD1 arithmétique Tle

QUESTIONS TESTS

1) Trouver une fraction d'entiers naturels sachant que la somme du numérateur et du dénominateur est 96 et que leur pgcd est 8
2) Déterminer tous les triangle rectangles dont les trois cotes sont mesures par des nombres entier et un cote de l'angle droit mesure 12 le nombre a étant la mesure de l'hypoténuse et b celle du troisième cote on montrera que a+b et a-b sont de même parité et on en déduira les valeurs possibles de a et b à l'aide de l'Egalite $(a+b)(a-b)=12^2$
3) Démontrer que pour tout entier naturel a il existe au moins un entier naturel tel que a^2+b^2 est un multiple de 5
4) Démontrer que $B(n)= 5^{2n} -1$ est multiple de 24
5) Démontrer quel que soit l'entier naturel n que $D(n)=5^{2n+3}- 3^{n+4}$ est divisible par 11
6) Démontrer que lorsque $a\neq b$ $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ n'est pas un entier
7) Démontrer que si a+b est premier alors a et b sont premiers entre eux
8) Le nombre 401 est-il premier ? résolvez en entiers naturels l'équation $x^2-y^2=401$
9) Soit p un entier naturel premiers montrer que si $p \geq 5$ alors 24 divise p^2-1
10) Déterminer le reste de la division euclidienne de :

    2014^{2013} par 7 ; $35(487)^{200} + 42(523)^{100} - 224$ par 5 ; $451 \times 6^{43} - 912$ par 7 ; 4^{1998} par 7

11) En remarquant $999 = 27 \times 37$ montré que pour tout entier naturel n on a $10^{3n} \equiv 1[37]$ et endeduire le reste de la division euclidiene de $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$
12) Ecrire la division euclidienne de -5000 par 17
13) Déterminer pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de $(275423)^n$ par 23
14) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(275423)^n + (372121)^n$ soit divisible par 3
15) Démontrer que pour tout entier naturel p 3^p et 3^{p+6} ont le même reste dans la division euclidienne par 7
16) Montrer que pour tout entier naturel n les entiers $(2103)^n$ et 3^n ont le même reste dans la division par 7
17) Montrer que pour tout entier naturel n on a $3*5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ divisible par 17
18) Quel est le nombre de diviseurs de 2880
19) Montrer que si p est un entier naturel premier alors $\sqrt{p}$ est irrationnel

TD1 arithmétique Tle

20) A) Ecrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.

b) Déterminer les entiers relatifs n tels que n − 4 divise 6.

c) Déterminer les entiers relatifs n tels que n − 4 divise n + 2.

d) Déterminer les entiers relatifs n tels que n + 1 divise 3n – 4

21) A) pour tout entier naturel n $3^{2n+1} + 2*4^{3n+1}$ est divisible par 11

b) pour tout entier naturel n $n^2(n^4 - 1)$ est divisible par 60

22) Trouver des entiers naturels n tels que l'entier $n^3 - 3n^2 - 2$ soit multiple de 7

23) a) dans le système décimal déterminer le chiffre des unités de 2^n et 7^n suivant les valeurs de l'entier naturel n

b) application : trouver le chiffre des unités de 3548^9*2537^{31}

24) Déterminer le pgcd(n-1 ; n+1) et ppcm(n-1 ; n+1) ou n est un entier supérieur ou égal a 2

25) Soit a et b deux entiers relatifs on pose A = 4a + 3b et B = 5a + 4b montrer que pgcd(a ,b)=pgcd(A ,B)

26) Existe-t-il une base dans laquelle on a $\overline{18} + \overline{14} = \overline{31}$ si oui calculer dans cette base $\overline{81} + \overline{41}$; $\overline{81} \times \overline{41}$; $\overline{18} \times \overline{14}$

27) En utilisant la numeration decimale comme intermediaire ecrire $\overline{120212}^3$ en base 8 et $\overline{1200}^5$ en base 2

28) Classer les entiers suivants du plus petit au plus grand $\overline{100101}^2$; $\overline{1010001}^2$; $\overline{1000100}^2$; $\overline{B1C49}^{16}$; $\overline{A0561D}^{16}$; $\overline{F1054B}^{16}$

29) Soit n un entier naturel on pose A= n+ 1 et B= $n^2 + 3n + 6$

a) Montrer que pgcd(A , B) = pgcd(A , 4)

b) Déterminer suivant les valeurs de n , pgcd(A , B)

c) Pour quelles valeurs de n $\frac{B}{A}$ est un entier relatif

30) Soit a et b entiers naturels non nuls on pose d = pgcd(a , b) et m= ppcm(a , b)

Déterminer a et b pour que $\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ b \leq a \end{cases}$

31) Donner tous les diviseurs positifs de 30 et trouver les couples (x , y) de $IN^* \times IN^*$ tels que 3M - 2Δ = 30 ou M=PPCM (X , Y) et Δ= pgcd(X ,Y)

32) Trouvez les deux nombres a et b sachant que leur PGCD est 24 et leur PPCM est 1344.

33) Trouvez deux entiers dont la différence entre leur PPCM et leur PGCD est 187

34) Démontrez que le nombre n = $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3 pour tous les entiers relatifs a et b.

35) 1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.

2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal a 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

36) Soit x un nombre réel montrer que x appartient a Q ssi x^7 et x^{12} appartiennent a Q (utiliser l'identité de Bézout)

- Est-il nécessairement vrai que x appartiennent a Q si x^4 et x^6 le sont ?

37) Quel est le reste dans la division euclidienne de $451 * 6^{43} - 912$ par 7 ?
Quel est le dernier chiffre dans l'écriture décimale de 3^{2017} ?

38) Soit n un entier naturel. démontrer a l'aide des congruences, que si n^2 est pair alors n est pair

39) Prouver que pour tout k appartenant a {2 , 3, 4 , 5} $5! + k$ n'est pas un nombre premiers

40) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, $3 * 4^n + 2$ est-il divisible par 11 ?

41) On pose $a = 1234$ et $b = 1200$.

a) Déterminez le PGCD d et le PPCM m de a et b.

b) (E) est l'équation dans Z^2 : $ax + by = 2d.m$ Donnez une solution évidente de cette équation. Déterminez l'ensemble des solutions de (E).

42) On demande de combien de manières on peut payer une somme de 52000F en donnant des chèques de 17000F et en recevant des chèques de 11000F

43) En utilisant le théorème de gauss déterminer 2 entiers naturels a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible et que $\frac{a+21}{b+15} = \frac{a}{b}$

44) Soit n un entier naturel $n \geq 3$ demontrer que si n est pas premier

b) déterminer deux entiers naturels consécutifs tous les deux premiers combien y'a –il de réponse possibles ?

45) Déterminer tous les entiers naturels n et p pour lesquels $15^n - 21^p$ est divisible par 12

46) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Démontrer que si a^2 divise b^2 alors a divisé b

47) Montrer qu'il n'existe pas 4 entiers relatifs x, y, z et k tels que l'on ait $x^2 + y^2 + z^2 = 8k + 7$

48) Soit E un ensemble fini de n éléments, F l'ensemble des parties E ;et G l'ensemble des parties F on rappelle que $CardF = 2^n$ on pose $m = CardG$ trouver, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier m

Evaluations des ressources

TD1 arithmétique Tle

Exercice 1

1) a) -Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la divisions euclidienne de 3^n par 7.
b)Démontrer que pour tout n $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.En déduire que 3^{n+6} et 3^n
ont le même reste dans la division euclidienne par 7
c) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000}
par 7
d) De manière générale, comment peut –on calculer le reste de la division euclidienne
de 3^n par 7, pour n quelconque ?
e-En déduire que, pour tout entier naturel n , 3n est premier avec 7
2) Soit $u_n = 1+3+3^2+....+.3^{n-1}$
   a) Montrer que $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$
   b) Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7
   c) Déterminer tous les diviseurs de u_6

Exercice 2

1) Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18360
2) En déduire dans IN ,la résolution de l'équation : $b^3(b^2 + (b+1)^2) = 18360$
3) Existe-t-il un entier naturel tel que 36723 s'écrive $\overline{442003}^{b}$

Exercice 3

Soit x , y,et z trois entiers naturels tels que : $y = \overline{131}^{x}$ et $z = \overline{101}^{x}$ avec x> 3
1) Calculer le produit xyz en base x
2) Déterminer x, sachant que : x + y+ z=50. Calculer alors xyz en base dix

Exercice 4

Soit n un entier premier différent de 2 .On considère les entiers naturels et $a = (n+1)^2$ et $b = n^3+1$ et on désigne par d le pgcd (a, b)
a) Montrer que: $\forall n \in IN$ $b = (n+1)^2(n-2) + 3(n+1)$
b) Démontrer que d=n+1 ou d= 3(n+1)
c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait 70a - 13b=8
d) Montrer alors que la seule valeurs possible de n est 7

Exercice 5

1-Etablir que pour tout $(a,b,q) \in Z^3$,pgcd(a, b) = pgcd(b , a-bq)
2-Montrer que pour tout $n \in Z$, pgcd($5n^3$-n , n+2) = pgcd(n+2 , 38)
3-Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que (n+2) divise ($5n^3$-n)
4-Quelles sont les valeurs possible de pgcd($5n^3$-n , n+2) ?

Exercice 6

TD1 arithmétique Tle

On se propose de déterminer les entiers relatifs n tels que : $\begin{cases} n \equiv 1(5) \\ n \equiv 5(7) \end{cases}$ (S)

1) Montrer que n est solution de (S) ssi : $\begin{cases} 4n+1 \equiv 0(5) \\ 4n+1 \equiv 0(7) \end{cases}$
2) En déduire que si n est solution de (S) alors on a 35k – 4n = 1 ou k appartenant a Z (1)
3) Résoudre (1) puis (S)

Exercice 7

1-Résoudre dans Z^2 l'équation 3u-8v=6

2-En déduire l'ensemble des solutions dans Z du système $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 7[8] \end{cases}$

Exercice 8

1) On considère dans Z^2 l'équation : (E) : 11x +8 y = 79
a) Montrer que si (x , y) est solution de (E) 1 alors y ≡ 3 [11]
b) Résoudre alors l'équation (E $_1$)

2-Soit dans Z^2 l'équation : (E$_2$) : 3y +11 z = 372.
a) Montrer que si (y , z) est solution de (E$_2$) alors z ≡ 0 [3]
b) Résoudre alors l'équation (E$_2$) .

3-Résoudre dans Z^2, l'équation : (E) : 3x −8 z = − 249 .

4-Le prix total de 41 pièces détachées, de pagne réparties en trois lots, est de 480fcfa.
Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 fcfa.
Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 fcfa.
Le prix d'une pièce du troisième lot est de 4fcfa.
Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice 10

Soit b un entiers supérieure a 1 on considère dans toute la suite le système de numérations de base b

1) Montrer que $\overline{10101}$ est divisible par $\overline{111}$ (on pourra calculer $(b^2+b+1)(b^2-b+1)$)
2) Montrer que $\overline{100010001}$ est divisible par $\overline{10101}$ et divise $\overline{1000000100000001}$

E

1) déterminer selon n appartenant a IN le reste de la division de 4^n par 7
2) Même question pour $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$
3) Soit $B=\overline{2103211}^4$ déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 7

Exercice 11

1) Soit N un entiers naturel s'écrivant $\overline{xyyx}$ dans le système décimal déterminer x et y tels que N soit multiple de 105
2) Soit M un entier naturel s'écrivant $\overline{xyzzx}$ dans le système décimale
   a) Montrer que M est un multiple de 11

b) déterminer x et z tels que M soit multiple de 35
c) déterminer y tel que M soit également multiple de 3

Exercice 12

Soit p un entier relatif différent de 1et n un entier naturel non nul.
On pose $S = 1 + p + p^2 + ... + p^{n-1}$
1-a) Ecrire S sous la forme d'un quotient.
b) Calculer l'expression $p^n + (1 - p)S$ et en déduire que p^n et $(1 - p)$ sont premiers Entre eux.
2-a) Résoudre, dans Z^2 l'équation : $p^n x - (1 - p) y = p$.
c) En déduire dans Z^2, les solutions de l'équation : $10^n + 2^{n+2} y - 10.2^{n-1} = 0$

Exercice 13

Dans cet exercice x et y sont des entiers naturels non nuls
1) On suppose qu'il existe un couple (x_0, y_0) solution de l'équation pgcd(x , y) + ppcm(x , y) = x+ 6 on pose $p=\text{pgcd}(x_0, y_0)$ et $m=\text{ppcm}(x_0, y_0)$ montrer que p divise 6
2) Déterminer toute les solutions du système $\begin{cases} \text{pgcd}(x, y) + \text{ppcm}(x, y) = x + 6 \\ \text{pgcd}(x, y) = 5 \end{cases}$
3) Même question pour le système $\begin{cases} \text{pgcd}(x, y) + \text{ppcm}(x, y) = x + 6 \\ \text{pgcd}(x, y) = 2 \end{cases}$

Exercice 14

Soit N= abcd en base décimal et $\overline{bcda}$ un entier naturel divisible par 7
1) Montrer que si a=0 ou a=7, alors N est divisible par 7
2) Montrer que 10N – 3a est divisible par 7 en déduire que si N est divisible par 7 alors a=0 ou a=7
3) On suppose que l'on a : a=7 , b= d et c = 0 déterminer N pour qu'il soit divisible par 3

Exercice 15

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.
Proposition 1 : ≪ l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation 12x − 5y = 3 est l'ensemble des couples (4 + 10k ; 9 + 24k) ou $k \in \mathbb{Z}$ ≫.
Proposition 2 : Pour tout entier naturel n non nul : ≪ 56n+1 + 23n+1 est divisible par 5 ≫.
Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul : ≪ Si un entier naturel n est congru a 1 modulo 7 alors
le PGCD de 3n + 4 et de 4n + 3 est égal a 7 ≫.
Proposition 4 : ≪ x2 + x + 3 ≡ 0[5] si et seulement si x ≡ 1[5] ≫.
Proposition 5 : Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix (M vaut

100a+10b+c ou a, b, c sont des chiffres entre 0 et 9) et N a pour écriture bca en base dix. Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier M − N est aussi divisible par 27 ≫.

Exercice 16

Partie A : Question de cours
Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.
Partie B
On note 0, 1, 2, . . . , 9, α , β , les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :
$\overline{\beta\alpha 7}^{12}$ = β ×122 + α ×12 + 7 = 11×144 + 10×12 + 7 = 1711 en base 10.
1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1\alpha}^{12}$. Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1\times10^3 + 1\times10^2 + 3\times10 + 1$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.
Dans toute la suite un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :
$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots \dots a_1 a_0}^{12}$
2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 [3]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
b. A l'aide de son écriture en base 12, déterminé si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.
3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ [11] . En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
b. A l'aide de son écriture en base 12, déterminé si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.
4. Un nombre N s'écrit $N = \overline{x4y}^{12}$ Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

Exercice 17

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
On nomme (S) la surface d'équations $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; −3) et (−1 ; 1 ; 1).
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).

4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels
vérifiant $a < b$ et ppcm(a ; b)= 440, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système (1)

$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ ppcm = 440 \end{cases}$$

Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors pgcd(a ; b) est egal a 1 ou 5. Conclure.

Exercice 18

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru a b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \bmod 7$
Lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.
1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*
a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
Démontrer que : si $a \equiv b \bmod 7$ et $c \equiv d \bmod 7$ alors $ac \equiv bd \bmod 7$.
b. En deduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n,
$a^n \equiv b^n \bmod 7$.
2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.
b. On appelle *ordre* de a mod 7, et on designe par k, le plus petit entier naturel non nul tel que
$a^k \equiv 1 \bmod 7$.
Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \bmod 7$. En déduire que k divise 6 quelles sont les valeurs de k
c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$
Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \bmod 7$

Exercice 19

1) Donner tous les diviseurs naturels de 15
2) Démontrer que si x et y sont deux entiers relatifs tels que $x^2y - y = 15$ alors y divise 15
3) déterminer tous les couple d'entiers relatifs (x , y) tels que $x^2y - y = 15$

Exercice 20

TD1 arithmétique Tle

1) n et p sont des entiers naturels non nuls avec $n > p^2$ démontrer que si d divise n et p alors d divise $n - p^2$
2) démontrer en utilisant la définition du pgcd que pgcd(n , p) = pgcd($n - p^2$, p)
3) déterminera alors le pgcd(10829 , 104)
4) soit k entier naturel non nul démontrer que pgcd($4k^2 + 4k + 6$, $2k + 1$) = 5 ssi $k \equiv 2(5)$

Exercice 21

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une
démonstration de la réponse choisie..
Proposition 1 : ≪ Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ≫.
Proposition 2 : ≪ Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$(modulo 6) alors
$x \equiv 0$(modulo 3) ≫.
Proposition 3 : ≪ L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples ($4 + 10k$; $9 + 24k$) ou $k \in \mathbb{Z}$ ≫.
Proposition 4 : ≪ Il existe un seul couple (a ; b) de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et ppcm(a ;b) – pgcd(a ;b)=1 Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour ecriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.
Proposition 5 : ≪ Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ≫

Exercice 22

1. Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13\times12v + 6\times19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut a $\begin{cases} n \equiv no(19) \\ n \equiv no(12) \end{cases}$

b. Démontrer que le système
$\begin{cases} n \equiv no(19) \\ n \equiv no(12) \end{cases}$
équivaut a $n \equiv n_0$ (12×19) .

3. a. Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N
Correspondante.
b. déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

TD1 arithmétique Tle

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste
Est 13.
On divise n par 228 $= 12\times19$. Quel est le reste r de cette division

Exercice 23

Soit p(n) = $n^6 - 1$ ou n est un entier naturel

1) calculer p(n) pour n appartenant a {1 ,2 ,................, 10} pour quelles valeurs de n comprises entre 1 et 10 , le nombre p(n) est- il divisible par 9 ?
2) factoriser p(n) en produit de facteurs premier ou du second degré a coefficient entiers
3) déterminer tous les entiers n pour que p(n) soit divisible par 9

Exercice 24

1) on considère l'équation (E) 8x + 5y =1 ou x et y sont des entiers relatifs
   a) donner une solution particulière de (E)
   b) résoudre (E)
2) soit N entier tel qu'il existe deux entiers a et b vérifiant $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$
   a) montrer que le couple (a , -b) est solution de de (E)
   b) quel est le reste dans la division euclidienne de N par 40
3) résoudre (E') : 8x + 5y =100 ou x et y sont des entiers relatifs
4) au 8^{eme} siècle, un groupe compose d'hommes et de femmes a dépense 100 pièces de monnaie dans une auberge. les hommes ont dépense 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans ce groupe ?

Exercice 25

1) écrire la division euclidienne de 1000 par 13

soit n entier naturel déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13

2) déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $10^{3n+1} + 10^{3n}$ par 13
3) en déduire le reste de la division euclidienne de 11.000.000.000.000 par 13
4) quel est le reste de la division euclidienne par 13 de $25*10^{15} + 1$

Exercice 26

1) on cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) : ax + by = 60 (avec a,b étant deux entiers naturels non nuls) on note d= pgcd(a, b)
   a) on suppose que l'équation (1) a au moins une solution (x_o ,y_o) montrer que d divise 60
   b) on suppose que d divise 60 prouver qu'il existe alors au moins une solution (x_0 ,y_o) a l'équation (1)
2) on considère l'équation (2) : 24x + 36y =60 ou x et y sont des entiers relatifs

TD1 arithmétique Tle

a) donner le pgcd de 24 et 36 en justifiant brièvement simplifié l'équation (2)

b) trouver une solution particulière pour l'équation (2) et résoudre cette équation

on appelle S l'ensemble des couples(x,y) solutions de (2)

c) trouver tous les couples solutions de (2) tels que - 10$\leq x \leq 10$

Donner parmi eux ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5

d) dans le plan rapporte a un repère orthonormé on considère les points A (1 ,1) et B(4 ,-1)

Représenter l'ensemble € des points M(x ,y) tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ k etant un nombre reel

e) montrer que les points ayant pour coordonnées les couples solutions (x , y) de l'équation (2) appartient a (E)

Comment peut –on caractériser S

Exercice 27

soit p et q deux entiers naturels tels que $p^2 – q^2= 1$

1) démontrer que p est impair
2) démontrer que q est pair

soit a, b et k trois entiers naturels non nuls démontrer que pgcd(a ,b) = pgcd(a +b ,b) ; pgcd(ka ,kb) = k*pgcd(a, b)

Exercice 28

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) 91x +10y = 1.
a. Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution a l'équation (E).
b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : 91x +10y = 412.
c. Résoudre (E').
2. Montrer que les nombres entiers An = 32n −1, ou n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.
(Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).
3. On considère l'équation (E'') A_3 x + A_2 y = 3296.
a. déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').
b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels.
Le déterminer

Exercice 29

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; u, v)
Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives a = 1 + i ; b = - 4 - i.

Soit f la transformation du plan (P) qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$

a) Exprimer z' en fonction de z.

b) Montrer que f admet un seul point invariant ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

3) On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leq x \leq 8 \quad et \quad 1 \leq y \leq 8$

Les coordonnées (x' ; y') de M' sont alors : x' = 3x + 2 et y' = 3y − 1.

a). On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Ecrire la liste des éléments de G et H.

b). Montrer que x' – y' est un multiple de 3.

c.) Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples (x' ; y') de $G \times H$tels que m = $x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d.) Montrer que dans ces conditions, le nombre x' – y' est un multiple de 6. Le nombre x' – y' peut-il être un multiple de 30 ?

e.) En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, x' + y' est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples (x' ; y') qui conviennent.

En déduire les couples (x ; y) correspondant aux couples (x' ; y') trouves.

Exercice 30

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels Admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:
(E) : $n^2 - Sn + 11994 = 0$
ou S est un entier naturel. On s'intéresse a des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.
1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs
Possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les entiers premiers inferieurs a 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Exercice 31

Soit n entier naturel supérieure ou egal a 2

1) montrer que n et 2n + 1 sont premier entre eux
2) on pose $\propto = n+3 \;\; \beta = 2n+1 \;\; et \;\; \delta = pgcd(\alpha, \beta)$
   a) calculer $2\alpha - \beta$ et en deduire les valeurs possibles de δ
   b) démontrer que $\alpha \; et \; \beta$sont multiples de 5 ssi n- 2 est multiple de 5
3) on considère a = $n^3 + 2n^2 - 3n$ et b = $2n^2 - n - 1$ montrer après factorisation que n – 1 divise a et b
4) a) on note d = pgcd(n(n+3) , 2n + 1) montrer que δ divise d puis que $\delta = d$

   b) en déduire le pgcd :Δ de a et b en fonction de n

   c) application : déterminer Δ pour n = 2001

   Déterminer Δ pour n = 2002

Exercice 32

1) quels sont les diviseurs positifs de 72
2) soit p entier naturel mettre $p^2 - 6p - 63$ sous forme d'une différence de deux entiers naturels tels que l'un soit un carre parfait et l'autre ne dépende pas de p

   en déduire tous les couples (p ,q) d'entiers naturels , solutions de l'équation $p^2 - 6p - 63 = q^2$

Exercice 33

soit a et b deux entiers relatifs

1) développer $(a + b)^7$ en déduire que $(a + b)^7$ est congru a $a^7 + b^7$ modulo 7
2) en déduire que (a + b) est multiple de 7 ssi $a^7 + b^7$ est divisible par 7
3) trouver tous les entiers relatifs x tels que :$\begin{cases} -10 \leq x \leq 10 \\ x^7 + 128 \;\; est \; multiple \; de \; 7 \end{cases}$

Exercice 34

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: 11n −24m = 1.
a). Justifier, a l'aide de l'énonce d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b.) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
c.) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
2. Recherche du P.G.C.D. de 1011 −1 et 1024 −1.
a). Justifier que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.
b.) (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$.
c. Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$ (on rappelle l'Egalite $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^0)$, valable
pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$.
d. Montrer que tout diviseur commun a $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.
e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.

Exercice 35

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers 14n + 3 et 5n + 1 sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (E) : 87x + 31y = 2 ou x et y sont des entiers relatifs.
a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que 87u + 31v = 1 puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).
b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
c. Application : Déterminer les points de la droite d'équation 87x − 31y − 2 = 0 dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
Indication : On remarquera que le point M de coordonnées (x ; y) appartient a la droite (D) si, et seulement
si, le couple (x ; y) versifie l'équation (E).

Exercice 36

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et $\begin{cases} x_{n+1}=\frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1 \\ y_{n+1}=\frac{20}{3}x_n+\frac{8}{3}y_n+5 \end{cases}$
avec $n\in\mathbb{N}$.
1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (D) dont une équation est 5x − y + 3 = 0. En déduire que $x_{n+1}=4x_n+2$
2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
3. Montrer que :
a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.
4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n=\frac{1}{3}(4^n\times 5-2)$

b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.

Exercice 37

1). Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :
$(x- 1)(1+ x +x^2 \ldots\ldots.+x^{k-1}) = X^k-1$
Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier à supérieur ou égal à 2.
2. a. Soit n un entier naturel non nul et d'un diviseur positif de n : n = dk. Montrer que $a^d -1$ est un
Diviseur dea^n-1.
b. Déduire de la question précédente que 2^{2004} -1 est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.
a. On définit m' et n' par m = dm' et n = dn'. En appliquant le théorème de Bézout a m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que mu- nv = d .
b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}\ 1)- (a^{nv} - 1)a^d = a^d -1$
Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} -1$
c. Calculer, en utilisant le résultat précèdent, le PGCD de 2^{63} -1 et de 2^{60} -1 .

Exercice 38

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.
1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que au+ bv = 1 alors les nombres a et b sont premiers entre eux.
b. En déduire que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.
2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que
$(a^2 + ab - b^2)^2 =$. Un tel couple sera appelé solution.
a. Déterminer a lorsque a = b.
b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.
c. Montrer que si (a ; b) est solution et si a < b , alors $a^2 - b^2 < 0$.
3. a. Montrer que si (x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors (y - x ; x) et (y ; y + x) sont aussi des solutions.
b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.
4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs (an) n $\epsilon\mathbb{N}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, n > 0 , $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Démontrer que pour tout entier naturel n ≥ 0 $(a_n ; a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux

Exercice 39

Partie A

TD1 arithmétique Tle

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ ou a et b sont deux entiers
Naturels.
1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.
1. Soit X un entier naturel.
a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .
c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b).
3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E).

a. démontrer que a est congru a 503 ou à 505 modulo 9.
b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505+9k ; b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique

Exercice 40

P et q sont des entiers naturels

1) Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$
2) Déduisez en que pour que $2^n - 1$ soit premier il faut que n soit premier
3) Prouvez a l'aide d'un contre-exemple que la condition n est premier n'est pas suffisante pour que $2^n - 1$ soit premier

Exercice 41

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère les nombres $a_n = 4 \times 10^n - 1$; $b_n = 2 \times 10^n - 1$; $c_n = 2 \times 10^n + 1$

1. a. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.
b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inferieurs a 100 donnée ci-dessous que b_3 est premier.
d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n $b_n \times c_n = a_{2n}$
e. Montrer que$pgcd(b_n, c_n) = pgcd(c_n, 2)$. En deduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
2. On considere l'équation (1) : $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.
a. Justifier le fait que (1) a au moins une solution.
b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).
c. Résoudre l'équation (1).
Liste des nombres premiers inferieurs a 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Exercice 42

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme abba ou a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.
Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.
1. a. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.
b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?
b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme abba.
a. Montrer que : ≪ n est divisible par 3 ≫ équivaut a ≪ a + b est divisible par 3 ≫.
b. Montrer que : ≪ n est divisible par 7 ≫ équivaut a ≪ b est divisible par 7 ≫.
4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.
Partie B : Etude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.
Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :
n = 2000 + 4p et n = 2002 + 11q.
1. On considère l'équation (e) : 4p − 11q = 2 ou p et q sont des entiers relatifs.
Vérifier que le couple (6 ; 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).
2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme 2024 + 44k ou k est un entier relatif.
3. A l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).
N.B. : Liste des nombres premiers inferieurs a 40 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

Exercice 43

Soit p, un entier naturel premier.
1. a. Démontrer que si k est un entier naturel tel que$1 \leq k \leq p - 1$, le nombre C_k^p est divisible par p.

1. b. En déduire que, quel que soit l'entier n, le nombre $(n + 1)^p - n^p - 1$ est divisible par p.
2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n, $n^p - n$ est divisible par p (on pourra faire un
Raisonnement par récurrence).
3. Montrer que pour tout entier n premier avec p, $n^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Exercice 44

Soit a et b deux nombres premiers tels que $a > b$on se propose de déterminer les couples (x , y) d'entiers naturels non nuls tels que $x^2 - y^2 = a^2b^2$ dans chacun des cas suivants

1) A) a est quelconque et b=2
   b)a est quelconque et $b \neq 2$

2) application :déterminer les solutions dans chacun des cas suivants

a=7 et b=2 ; a=11 et b=5

Exercice 45

soit p un nombre premier diffèrent de 2

1) Dresser la liste des diviseurs de p^4. On désigne par S la somme de ses diviseurs
2) Démontrer que quel que soit p on a $(2p + p^2)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$
3) On se propose de déterminer p de façon que S soit un carre parfait c'est-à-dire le carre d'un nombre entier n
   a) Démontrez que $2p^2 + p < 2n < 2p^2 + p + 2$
   b) Déduis-en l'existence et l'unicité de n pour p fixe
   c) Calculer n puis le couple (p ,n)

Exercice 46

Démontrer que si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible il en est de même pour les fraction

a) $\frac{a+b}{ab}$ b) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ c) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ d) $\frac{ab}{a^2+b^2}$

Exercice 47

Chaque couple d'entiers naturels non nuls on associe l'entier non nul note $\propto(p,q)$ defini par $\propto(p,q) = (2p+1)2^q$

1) Montrer que l'on a $\propto(p,q) = \propto(p',q')$ si et seulement si q=q' et p=p'

2) Montrer que pour tout entiers naturel n il existe un couple (p,q) d'entiers naturels telque $n = \propto (p,q)$
3) Déduisez des questions précédentes que tout entier naturel n non nul il existe un couple (p , q) unique d'entiers tels que $n=(2p + 1)2^p$

Exercice 48

Soit le produit des n entiers naturels impairs $a_n = 1 \times 2 \times 5 \times 7 \times \dots \dots \dots \times (2n-1)$

1) Démontrer l'égalité $a_n \times n! \times 2^n = (2n)!$
2) Déduisez en que le produit $(n+1)(n+2) \dots . \times (2n-1)(2n)$ est divisible par 2^n
3) Montrer que si pour tout un entier naturel p le produit $(n+1)(n+2) \dots \times (2n-1)(2n)$ est divisible par 2^p alors $p \leq n$

Exercice 49

On se propose de déterminer les solutions entières de l' équation (E) $x^2 + y^2 = z^2$ telles que $xyz \neq 0$

1) a) montrer que l'on peut se borner a chercher les solutions dans lesquelles x, y, et z sont premiers entre eux dans leur ensemble c'est-à-dire tels que leur seul diviseur commun est un 1
b)déduisez qu'alors ils sont deux a deux premiers entre eux

2) soit (x,y,z) une solution ou x ,y et sont premiers entre eux on suppose que z est impair montrer que l'un des deux entiers x ou y est impair l'autre étant pair

3) a) on suppose que x est pair sachant y et z premiers entre eux et impairs montrez que pgcd(z-y , z+y)=2 déduisez-en qu'il existe deux entiers A et B premiers entre eux tels que (z-y)(z+y)=4AB

b) écrivez (E) sous forme : $x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y)$ et montrez que les nombres A et B sont les carres de deux entiers naturels a et b , premiers entre eux tels que $a<b$

c) déduisez en que $x^2 = 4a^2b^2$ ou $z - y = 2a^2$ et $z + y = 2b^2$

d) montrez qu'en choisissant deux entiers premiers entre eux et en utilisant les formules $x = 2ab$, $y = b^2 - a^2$, $z = a^2 + b^2$ on obtient des solutions de (E)

e) ces formules restent-elles valables lorsque a et b sont deux entiers distinscts quelconques tels que b > a ?

4) donnez 10 solutions de l'équation (E)

TD1 arithmétique Tle

Exercice 50

Soit n entier naturel non nul

1) montrer que tout diviseur commun a 5n – 3 et n + 1 divise 8
2) en déduire que 5n – 3 et n + 1 sont premier entre eux si n est pair
3) déterminer l'entier naturel n tel que : pgcd(5n – 3 , n + 1) = 8

Exercice 51

Dans un triangle a et b sont les mesures de deux côtes de l'angle droit

1) l'hypoténuse mesure c (c entier)
   a) démontrer que a et b ne peuvent êtres impairs ensembles
   b) expliquer pourquoi si a est impair c est aussi impair
2) l'hypoténuse mesure $c\sqrt{2}$ (c entiers)
   a) démontrer que a et b sont pairs ensembles ou impairs ensemble
   b) démontrer que c a la même parité que a et b
   c) justifier l'Egalite $n^2 + (n + 2k)^2 = 2[(n + k)^2 + k^2]$ avec n et k entiers
   d) en utilisant l'égalité $3^2 + 4^2=5^2$ trouver un exemple numérique pour chaque cas lorsque a et b sont pairs puis lorsque a et b sont impairs faire de même avec l'égalité $5^2 + 12^2 = 13^2$
3) Trouver tous les triplets d'entiers naturels a, b ,et c tels que $a^2 + b^2 = c^2$

Exercice 52

Pour un achat de 27 millions je donne des chèques de 5 million et le caissier me rend des chèques de 2 millions on appelle x le nombre de chèque de 5 millions et y celui des chèques de 2 millions

1) Vérifier que x = 27 et y =54 est une solution possible
2) Justifier que x et u=y doivent vérifier l'équation 5x – 5y = 27
3) déterminer les valeurs générales de x et y
4) Démontrer que $k \geq -10$ et en deduire les valeurs minimales de x et y

Exercice 54

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$

1) Montrer que l'équation f(x) = à admet dans IR une unique solution α $et\ \alpha \in$ $]0 \quad 1[$
2) Montrer que si f(x) =0 admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}, p\ et\ q$ etant premiers entre eux alors p divise 3 et q divise 4 quels sont les rationnels verifiant cette derniere condition ?

3) Trouver une solution rationnelle de l'équation f(x)=0 achever la résolution de cette équation dans l'ensemble C des nombres complexes

Exercice 55

On considère la suite $(U_n)_{n>0}$ telle que $U_1 = 1$ et $U_2 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n , $U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n$

1) Calculer U_3 , U_4 ,U_5 , et U_6
2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n U_n est un entier impair
3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n pgcd(U_n , U_{n+1}) = 1 et pgcd(U_n , U_{n+2}) =1

Exercice 56

1. a. Calculer : $(1+\sqrt{6})^2$; $(1+\sqrt{6})^4$; $(1+\sqrt{6})^6$

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide a 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que : $(1+\sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$

a. Que valent a_1 et $b1$? D'après les calculs de la question 1. a., donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

b. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

d. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Evaluations des compétences

Situation 1

Une fleuriste a reçu 382 roses blanches et 462 roses rouges elle désire réaliser des bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs

1) dans ces conditions est-ce possible que cette fleuriste réalise des 55 bouquets ? 42 bouquets ?
2) soit N le nombre de bouquets, traduire les hypothèses à l'aides de N
3) a) calculer tous les diviseurs communs a 385 et 462

   b) en admettant qu'aucune fleur n'est abime donne toutes les situations dans lesquelles les bouquets sont identiques

4) quel est le nombre maximal de bouquets identiques dans la composition de ses bouquets

Situation 2

Monsieur kamdem désire approvisionner son échoppe en riz sucre et farine. le prix du sac de riz est de 6000 fcfa ,le prix du carton de sucre est 9000fcfa .le sac de farine coute 3000 fcfa plus cher que le sac de riz compte tenue du stock qu'il possède .mr kamdem souhaite prendre deux fois plus de farine que de riz

Quelle quantité des trois marchandises il pourra –il acheter sachant qu'il ne dispose que d'une somme de 120.000fcfa

Situation 3

Suite a la pandémie a la covid 19 le minesec a pris comme décision de limiter les effectif par classe au plus a 50 élèves .Dans une Terminale S, la taille moyenne des élèves est de 167 cm, la taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm. Quel est l'effectif de la classe ?

Situation 4

Lors des jeux universitaire à Dschang un étudiant a effectué des réservations dans deux d'hébergement .l'hébergement A et l'hébergement B . Une nuit à l'hébergement A couté 2400 FCFA et une nuit à l'hébergement B coute 4500 FCFA il se rappelle le cout total de sa réservation est de 43800cfa
Il se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A

1) Quel est le nombre de nuit passe A
2) Quel est le nombre de nuit passe B

Situation 5

Une entreprise à définir son procède de codage des donnes de la façon suivant
Etape 1 a la lettre que l'on veut coder on associe le nombre m correspondant dans le tableau 1
étape 2 on calcule le reste de la division euclidienne de 9m + 5 par 26 et on note P.
Etape 3 au nombre P on associe la lettre correspondante dans le tableau
Tableau : a chaque lettre de l'alphabet on associe un nombre entier compris entre 0 et 25

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

CODER LA LEETTRE b

TD1 arithmétique Tle

Situation 6

la base militaire de koutaba dans le Noun Cameroun est composes de régiments et chaque régiment a un nombre de x soldats lorsque 11 régiments se retrouvent pour le repas , il y'a 7 salles occupées et 5 soldats qui n'ont pas de place .pour le repos 7 régiments sont convoqués ils occupent 5 dortoirs et il y'a 11 soldats sans lits. 5 régiments sont convoqués pour l'embarquement ils occupent 11 camions et 7 soldats n'ont pas de places.

Quel est Le nombre de soldats par régiment, sachant que le régiment a moins de 300 soldats

Situation 7

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le Jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.
1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (u ; v) est solution de l'équation (E1) : $35x - 27y = 2$.
2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0 ; y_0) solution particulière de l'équation (E_2) : $35x - 27y = 1$.
b). En déduire une solution particulière (u_0 ; v_0) de (E_1).
c). Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).
d). Déterminer la solution (u ; v) permettant de déterminer J_1.
3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J1 ?
(L'année 2000 était
Bissextile.)
c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'a la prochaine conjonction des deux astres ?