

Epreuve de Mathématiques

Exercice 01 : (04,5 points)

- A)
- 1) Décomposer 18360 puis déterminer tous les entiers dont le cube divise 18360 0,5 pt
 - 2) Déterminer alors n entier naturel tel que $n^3[n^2 + (n + 1)^2] = 18360$ 0,5pt
 - 3) Trouver l'entier m tel que $\overline{442003}^m = 36723$ 0,5 pt
 - 4) Déterminer les couples d'entiers naturels (x, y) tels que
$$\begin{cases} \text{ppmc}(x, y) = 8160 \\ \text{pgcd}(x, y) = 5 \\ x > y \end{cases}$$
 0,75 pt

B) On propose de résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) suivante $z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1 = 0$. On pose

$$P(z) = z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1.$$

1. a) Montrer que $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. 0,25 pt
- b) Montrer que si z_0 est solution de (E), alors il en est de même de \bar{z}_0 , $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\bar{z}_0}$. 1 pt
2. Vérifier que $-1+i$ est une solution de (E) et en déduire alors toutes les autres solutions de (E). 1 pt

Exercice 02 (07 points)

- A) ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$. I désigne le milieu de $[AC]$ et G le barycentre du système $\{(A, 3); (B, -2); (C, 1)\}$.
1. a) Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG. 0,75 pt
 - b) Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC. 1 pt
 2. A tout point M du plan, on associe le nombre réel $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$.
 1. a) Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a. 0,5 pt
 - b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 2a^2$. 0,5 pt
 3. A tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$
 - a) Démontrer qu'il existe un vecteur \vec{U} non nul tel que $h(M) = \overline{MB} \cdot \vec{U} - 2a^2$. 0,75 pt
 - b) On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = -2a^2$. 0,5 pt
 4. (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux. 1 pt
- B) L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1; 1; 0)$; $B(1; 2; 1)$ et $C(-1; 2; 3)$.
1. Calculer $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ et en déduire que les points A, B et C sont coplanaires. 0,75 pt
 2. Calcule l'aire du triangle ABC. 0,25 pt
 3. Soit (P) le plan d'équation $2x - y + z = 0$ et (Δ) la droite orthogonale à (P) passant par O. Déterminer une équation paramétrique de (Δ) . 0,5 pt

Problème (08,5 points)

Les fonctions $f_m(x)$ et g sont des fonctions numériques d'une variable réelle définies

respectivement définies par $f_m(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} - mx$ et $g_m(x) = \frac{f_m(x)}{x-2}$.

1. a) Déterminer le domaine de définition D_{f_m} de $f_m(x)$. 0,5 pt
b) Déterminer la valeur de m pour laquelle g est prolongeable par continuité en 2 puis déterminer le prolongement G de g . 0,5pt
2. Calculer suivant les valeurs de m la limite de $f_m(x)$ quand x tend vers $+\infty$. 0,75 pt
3. Dans la suite, on suppose que $m=0$ et on pose $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$ et (C_f) est la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
a) Montrer que (C_f) admet deux demi-tangentes en deux points à préciser. 1 pt
b) Montrer que la droite d'équation $2x - 2y + 1 = 0$ est l'une des deux asymptotes à (C_f) puis déterminer l'autre. 1 pt
c) Dresser le tableau de variation de f sur D_f . 0,5 pt
4. h est la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \sqrt{|x^2 + x - 2|}$.
a) Montrer que la courbe de h est la réunion de (C_f) et d'un arc de cercle dont on déterminera le centre et le rayon. 1 pt
b) Construire la courbe de h . 1 pt
5. Déterminer les images par h des intervalles suivants : a) $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ b) $J = [-1; 1]$. 0,5 pt
6. a) Montrer que l'équation $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ admet dans $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ une solution α . 0,75 pt
b) Montrer que pour tout $x \in I$, $|h'(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{5}}$. 0,5 pt
c) Montrer que pour tout $x \in I$, $|\sqrt{-x^2 - x + 2} - 1 - \sqrt{\alpha}| \leq \frac{3}{\sqrt{5}} |x - \alpha|$. 0,5 pt

« Par M. DJOUTSOP Emile »