BURKINA FASO

Ministère de l'Education nationale, de l'Alphabétisation et de la Promotion des Langues nationales

2020

Annales

T^le^ C

MATHEMATIQUES

► Rappel de cours

► Epreuves

► Corrigés

Interdit de vendre

BURKINA FASO

Unité – Progrès – Justice

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE,
DE L'ALPHABETISATION ET DE LA PROMOTION
DES LANGUES NATIONALES

ANNALES

MATHÉMATIQUES

TERMINALE C E

AUTEURS :

Dieudonné KOURAOGO	IES
Victor T. BARRY	IES
Jean Marc TIENDREBEOGO	IES
Clément TRAORE	IES
Bakary COMPAORE	IES
Abdoul KABORE	CPES

Maquette et mise en page :

OUEDRAOGO Joseph

ISBN :

Edition :

Direction générale de la Recherche en Éducation et de l'Innovation pédagogique

PREFACE

Dans le contexte de l'Education en Situation d'Urgence engendrée par la crise sécuritaire dans notre pays depuis 2016, le Ministère de l'Education nationale, de l'Alphabétisation et de la Promotion des Langues nationales (MENAPLN) a vu la nécessité de recourir à des alternatives pédagogiques pour assurer la continuité éducative des élèves en rupture de scolarité.

Cet impératif s'est exaspéré en fin de second trimestre de l'année scolaire 2019-2020 par une crise sanitaire due à la pandémie de la COVID-19 qui a entraîné la suspension des activités pédagogiques pendant trois (03) mois. Durant cette période, mon département a produit des ressources pédagogiques numériques qui ont été diffusées par la radio, la télévision et une plateforme WEB éducative au profit des élèves des classes d'examen du primaire, du post-primaire et du secondaire.

Pour ceux d'entre eux qui n'ont pas accès à ces canaux de diffusion et par souci d'équité et d'inclusion, il est apparu nécessaire de produire des résumés suivis d'exercices corrigés pour leur permettre de s'exercer en vue des examens scolaires.

Pour se faire, les équipes pédagogiques disciplinaires du MENAPLN ont été mises à contribution pour concevoir des supports pédagogiques adaptés aux besoins de maintien et de réussite des apprenants.

Qu'il me plaise de rappeler une fois encore que les supports didactiques ne remplacent pas l'enseignant dont le rôle est essentiel. Ils permettent aux élèves de poursuivre leur apprentissage en dehors de la classe afin de ne pas rompre avec le savoir dans les situations de rupture scolaire.

A tous les acteurs et partenaires qui se sont investis pour produire ces chefs d'œuvre dans les conditions d'urgence, je leur réitère ma gratitude et mes remerciements et adresse mes vœux de succès aux candidats et aux futurs utilisateurs de ces bréviaires.

Le Ministre de l'Education nationale, de l'Alphabétisation et de la Promotion des Langues nationales

Ministère de l'Education Nationale, de l'Alphabétisation et de la Promotion ...

Le Ministre

Pr Stanislas OUARO

Officier de l'Ordre des Palmes Académiques

AVANT-PROPOS

La présente annale destinée à la classe de terminale C/E a pour but d'aider le professeur dans son enseignement et le candidat au baccalauréat C ou E de se préparer à l'épreuve de mathématiques.

Cette annale comporte trois parties :

Première partie : résumé du cours par chapitre ;

Deuxième partie : énoncés des épreuves du baccalauréat C/E ;

Troisième partie : propositions de corrigés des épreuves.

Les candidats ne tireront profit qu'en résolvant et trouvant par eux-mêmes les solutions sans avoir recours aux corrigés. Les corrigés sont pour confirmer leurs justes réponses ou donner d'autres pistes de résolution qui ne sont peut-être pas les leurs. Le succès résulte de l'effort et de la méthode.

Nous vous souhaitons du plaisir dans vos activités mathématiques et attendons vos critiques et suggestions pour des améliorations futures d'autres œuvres.

Les auteurs

RAPPEL DE COURS

Chapitre : *ARITHMETIQUE*

Propriétés dans IN

1) Toute partie non vide de IN admet un plus petit élément.
2) Toute partie non vide et majorée de IN admet un plus grand élément.
3) Propriété d'Archimède : pour tout entier naturel a et tout entier naturel non nul b, il existe un entier n tel que nb>a
4) Axiome de récurrence
   "Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de montrer que :
   a) la propriété est vraie pour $n = n_0$;
   b) la propriété pour un entier quelconque n implique la propriété pour l'entier suivant n+1."

Division euclidienne

1) Dans IN : pour $a \in IN$ et $b \in N^*$, il existe un unique couple (q,r) de $IN \times IN$ tel que : $a= bq +r$ et $0 \leq r < b$
2) Dans Z : pour $a \in Z$ et $b \in Z^*$, il existe un unique couple (q,r) de $Z \times Z$ tel que $a= bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$

Multiples et diviseurs

Soit a et b éléments de Z

Définitions

- On dit que a est un multiple de b si et seulement s'il existe un entier k tel que a= kb
- Si $b \neq 0$, on dit que b est un diviseur de a, ou que b divise a, si et seulement si a est un multiple de b

Notation : l'ensemble des multiples de a se note az

Propriétés : $az \subset bz \Leftrightarrow$ a est multiple de b

Congruence modulo n ($n \in IN^*$)

Définition : x et y étant deux entiers, on dit que x est congru à y modulo n et on note $x \equiv y\ [n]$ si et seulement si $x - y \in nZ$

Propriété : $x \equiv y\ [\,n\,]$ si et seulement si x et y ont le même reste dans le division euclidienne par n

Compatibilité avec les opérations

Si $x \equiv x'[n]$ et $y \equiv y'[n]$ alors $x+ y \equiv x'+ y'\ [n]$

et $xy \equiv x'y'\ [n\,]$

et $x^{'k} \equiv x'^{k}\ [n]$ ($k \in N^*$)

Caractères de divisibilité

PPCM

a et b éléments de IN*

Théorème- définition :

PPCM (a,b) = le plus petit élément strictement positif de $aZ \cap bZ$

Théorème

L'ensemble des multiples communs à deux nombres est l'ensemble des multiples de leur PPCM, c'est-à-dire : lorsque PPCM (a,b)= μ on a $\boxed{az \cap bz = \mu Z}$

Propriété :

Soit k Є IN*, PPCM(ka,kb) = kPPCM(a,b)

Remarque : si a et b sont éléments de Z*, alors PPCM (a,b) =PPCM ($|a|, |b|$)

PGCD

On note D_n l'ensemble des diviseurs d'un entier n. Pour la suite, a et b sont éléments de IN*.

Définition :

PGCD (a,b) = le plus grand élément de $D_a \cap D_b$

Théorème :

L'ensemble des diviseurs communs à deux nombres est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD. C'est-à-dire lorsque PGCD (a,b) = δ, on a

1) $D_a \cap D_b = D_\delta$ ou encore
2) Pour tout d Є Z*d/a et d/b ⟺ d/δ

Propriétés :

- (P1) pour k Є IN*, PGCD(ka, kb) = kPGCD(a,b)
- (P2) supposons : a > b, PGCD (a,b) = PGCD(

- (P3) supposons : a > b, Si a = bq + r avec $0 \leq r < b$ alors PGCD(a,b) = PGCD(b,r)

Recherche pratique du PGCD :

- À l'aide de la propriété (P2)
- À l'aide de la propriété (P3) (algorithme d'Euclide)

Nombres premiers entre eux

a et b éléments de IN*

Définition :

a et b sont dits premiers entre eux si et seulement si PGCD(a,b)= 1

Théorème de Bezout

PGCD(a,b)= 1 si et seulement s'il existe (u,v) Є Z×Z tel que ua+vb= 1

Théorème de Gauss

Si un nombre divise un produit de deux facteurs et s'il est premier avec l'un des facteurs alors il divise l'autre.

Si (a/bc et PGCD (a,b) = 1 alors a/c)

Propriétés

- (P1) si un entier n est divisible par deux entiers a et b premiers entre eux, il est divisible par leur produit ab.
  Si PGCD (a,b) = 1 et a/n et b/n alors ab/n
- (P2) si un entier a est premier avec deux entiers b et c, il est premier avec leur produit bc
  Si PGCD (a,b) = 1 et PGCD(a,b) = 1 alors PGCD(a,bc) = 1

Relation entre PGCD et PPCM

PGCD(a,b)×PPCM(a,b) = ab

Nombres premiers

Définition

- dans IN : soit a Є IN\{ 0 ;1 } *; a est* premier si et seulement si D_a={ 1 ;a }
- dans Z : soit a Є Z\{ -1 ;0 ;1 } ; *a est* premier si et seulement si D_a= { -1 ;1 ;a ;-a }

Remarque : Dans toute la suite on se placera dans IN

Théorèmes

- (T1) tout entier naturel a strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier
- (T2) tout entier a non premier et strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier p tel que $p^2 \leq a$
- (T3) l'ensemble des nombres premiers est infini

Méthodes de recherches

- Rechercher les nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier n
- Déterminer si un nombre donné est premier

En utilisant le crible d'Erathosthène dont le principe repose sur : « si aucun nombre premier n tel que $2 \leq n \leq \sqrt{a}$ ne divise a, alors a est premier »

Nombres premiers et divisibilité

- Tout nombre premier est premier avec tout entier qu'il ne divise pas
- Tout nombre premier divisant un produit d'entiers divise l'un au moins des facteurs du produit
- Si un nombre premier divise un produit de nombres premiers, alors il est égal à l'un des facteurs du produit

Décomposition en un produit de facteurs de produits

- Tout entier naturel non premier et strictement supérieur à 1 peut s'écrire de manière unique en un produit de facteurs premiers

Chapitre : *CALCUL VECTORIEL*

Relation de Leibniz

Soit M un point quelconque de E ; E étant le plan ou l'espace.

Réduction de la somme $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mathrm{MA_i}^2$.

1^{er} cas : $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \neq 0$

Soit G le barycentre du système des points $\{A_i(\alpha_i)\}$ avec i allant de 1 à n ; on a :

$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mathrm{MA_i}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mathrm{GA_i}^2 + (\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i)\mathrm{MG}^2$.

$2^{\text{ème}}$ cas : $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = 0$; dans ce cas $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mathrm{MA_i}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mathrm{OA_i}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\vec{\mathrm{V}}$ où O est un point fixé quelconque et $\vec{\mathrm{V}} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}}$.

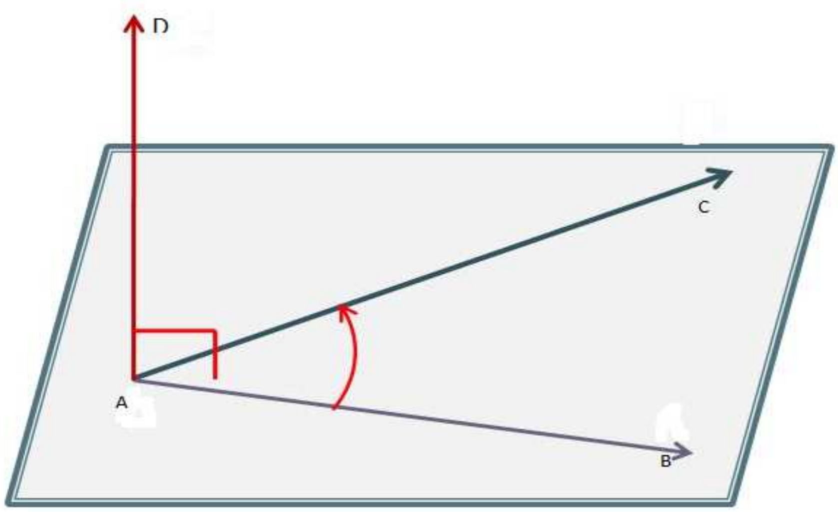
Produit vectoriel

Définition1 : Si A, B et C sont 3 points non alignés de l'espace orienté, le produit scalaire de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ par $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ dans cet ordre, noté $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ défini par :

a) la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) ;

b) le repère (A, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$) est direct ;

c) la longueur AD est égale à AB.AC.sinθ (θ mesure en radian de l'angle géométrique ($\widehat{ABC}$)



$\overrightarrow{\mathrm{C}}$

Définition3 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant 2 vecteurs de l'espace orienté tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ dans cet ordre, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Propriétés

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tous réels a et b, on a :
   a) $(a\vec{u}) \wedge (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \wedge \vec{v})$
   b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
3. Le produit vecteur de 2 vecteurs est nul si et seulement si ces 2 vecteurs sont colinéaires

Expression analytique du produit scalaire

On considère dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A et B ; on a :

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (y_A z_B - z_A y_B)\ \vec{i}\ - (x_A z_B - z_A x_B)\ \vec{j}\ + (x_A y_B - y_A x_B)\ \vec{k}$

Chapitre : *NOMBRES COMPLEXES*

Théorème (admis)

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant :

i) $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

ii) L'équation $x^2+1=0$ admet une racine dans $\mathbb{C}$ que l'on note ***i***, appelée **solution imaginaire**.

iii) Tout élément z de $\mathbb{C}$, s'écrit d'une manière unique sous la forme $z=a+ib$, où a et b sont des réels.

Vocabulaire

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe.

Le réel a est appelé **partie réelle** de **z**. On le note $\mathbf{Re}(\mathbf{z})$.

Le réel b est appelé **partie imaginaire** de **z**. On le note $\mathbf{Im}(\mathbf{z})$.

L'écriture $z=a+ib$ s'appelle **forme cartésienne** ou **forme algébrique** du nombre complexe z.

Notations

Pour tout nombre naturel non nul n, on pose : $z^n = z\times z\times...\times z$ (n fois). De plus si z est un nombre complexe non nul, on pose : $\mathbf{z}^{-\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}^{\mathbf{n}}}$ et on convient que $\mathbf{z}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$

1. Opérations sur les nombres complexes

a) Le nombre complexe i étant solution de l'équation $x^2+1=0$, on a : $\boldsymbol{i^2=-1}$; $\boldsymbol{(-i)^2=-1}$.

b) L'addition et la multiplication suivent dans □ , les mêmes règles que dans □ .

Si $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ sont deux nombres complexes, alors : $z+z'=(a+a')+i(b+b')$;

$zz'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$ (car $i^2=-1$)

c) Pour tout nombre complexe $z=a+ib$, il existe un unique nombre complexe z' appelé opposé de z et noté $-z$ tel que $z+z'=0$ et on a : $-z=-a-ib$.

d) Pour tout nombre complexe non nul z, il existe un nombre complexe unique z' appelé inverse de z et noté $\dfrac{1}{z}$ tel que $zz'=1$, et on a : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

e) $z=0$ si et seulement si $a=b=0$.

f) Si $b=0$ alors z est réel.

g) Si $a=0$ alors z est dit imaginaire pur.

Propriétés

- Deux points du plan P sont confondus si et seulement s'ils ont même affixe.
- Le nombre complexe $z=0$ a pour image le point O.
- Le nombre complexe z est réel si et seulement si $M(z)$ appartient à la droite $(0,\vec{u})$.
- Le nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $M(z)$ appartient à la droite $(0,\vec{v})$.
- La transformation du plan P qui, à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $-z$ est la symétrie centrale de centre O.

Théorème

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. Soient A et B deux points tels que $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$. On a : $z_{\vec{v}}=z_B-z_A$ ou $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ où z_B et z_A sont les affixes respectives des points B et A.

Translation

Soit $\vec{T}$ un vecteur d'affixe t. L'image d'un point M d'affixe z par la translation de vecteur $\vec{T}$ est le point M' d'affixe $z+t$.

Théorème

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$
- $\overline{\overline{z}}=z$
- $\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$
- $\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$
- z est réel si et seulement si $\bar{z}=z$
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z}=-z$

Théorème

Pour tous nombres complexes z et z', on a : $\overline{zz'}=\bar{z}\times\overline{z'}$; $\left(\overline{z^n}\right)=\left(\bar{z}\right)^n$, n'étant un entier relatif non nul.

Pour tout nombre complexe z non nul et pour tout nombre complexe z', on a : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$; $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\bar{z}}$, $\left(\overline{z^{-n}}\right)=\left(\bar{z}\right)^{-n}$, n étant un entier relatif non nul.

Définition

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe d'image M. On appelle **module de z** la distance OM et on note $\mathbf{|z| = OM = \sqrt{a^2+b^2}}$.

Cas particulier

Si $b=0$, alors z est réel et $|z|=\sqrt{a^2}=|a|$ (valeur absolue de a).

Conséquences

Pour tout nombre complexe z, on a :

- $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$; $|z|=|\bar{z}|$; $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$; $|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$.
- Si $M(z)$ est l'image de z alors $OM=|z|$.
- Si A et B sont deux points du plan complexe alors : $AB=|z_B-z_A|$.
- Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Théorème

1. Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $|z|=0$ équivaut à $z=0$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|\lambda z|=|\lambda||z|$, pour tout réel λ

2. Pour tous nombres complexes z et z', on a :

$|zz'|=|z||z'|$; $|z^n|=|z|^n$; n étant un entier relatif non nul

3. Pour tout nombre complexe non nul z et pour tout nombre complexe z', on a : $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$;

$\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$; $|z^{-n}|=|z|^{-n}$; n étant un entier relatif non nul

Théorème (admis)

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans P. On a : $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\theta=(\overrightarrow{OI}\ ;\overrightarrow{OM})[2\pi]$.

Réciproquement si le nombre complexe z s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et θ réel, alors : $r = |z|$ et $\theta = (\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})[2\pi]$ où M est l'image de z dans le plan complexe P.

Vocabulaire

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r > 0$ est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Notation

On note parfois $\mathbf{z = [r, \theta]}$.

Définition

Soit z **un nombre complexe non nul et** M **son** image dans P. On appelle **argument** de z et on note $\mathbf{arg(z)}$, toute mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM})$. On écrit : $\arg(z) = \theta[2\pi] = \theta + 2k\pi$; k∈ Z

$Arg(z)$ est la mesure principale de $\arg(z)$ non utilisé dans ce document.

Conséquence

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')[2\pi]$.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z non nul et tout réel α strictement positif, on a :

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$
- $\arg(\alpha z) = \arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-\alpha z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$

Cas particulier

Soit α un réel strictement positif.

- $\arg(\alpha) = 0[2\pi]$
- $\arg(-\alpha) = \pi[2\pi]$
- $\arg(i\alpha) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg(-i\alpha) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$; n étant un entier relatif

Propriétés

Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier relatif n, on a : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$; $e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$; $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$; $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$

Remarque

Soit z un nombre complexe non nul. Soit M son image dans le plan complexe. Si $r = |z|$ et $\theta = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)[2\pi] = \arg(z)$ alors $z = re^{i\theta}$.

Conséquence

Pour tout réel $r > 0$ et tout réel θ, on a : $-re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$; $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.

Propriété

Soient trois points A, B et C tels que $B \neq A$ et $C \neq A$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

Propriété

Soit un réel θ. L'image d'un point M d'affixe z par la rotation de centre O (origine du repère) et d'angle θ est le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}z$.

L'application f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto z'$ est dite associée à la rotation de centre O et d'angle θ.

Formule d'Euler

Pour tout réel θ, on a : $\mathbf{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\mathbf{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$.

Conséquences

Pour tout entier n, on a : $\mathbf{\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}}$; $\mathbf{\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}}$.

Vocabulaire

Le procédé qui consiste à écrire $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ est appelé **linéarisation**.

On vient donc de linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^3 x$.

Théorème

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c complexes et $a \neq 0$) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \dfrac{-b+\sigma}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sigma}{2a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ et σ est une racine carrée de Δ.

Chapitre : *TRANSFORMATIONS DU PLAN*

1) <u>Définition d'une transformation du plan</u>

Une transformation f du plan est une application bijective du plan dans lui-même.

2) <u>Propriétés</u>

a) Transformation réciproque

Si f est une transformation du plan, alors l'application réciproque f^{-1} de f, est aussi une transformation du plan f (M) = M'signifie que M = f^{-1} (M').

b) Composée de transformations

Si f et g sont deux transformations du plan, alors l'application notée g o f appelée composé de g et de f ou composée de f par g, est aussi une transformation du plan.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & M_1 \arrow[r, "g"] & M' \end{tikzcd} \qquad (gof)(M) = g(f(M)) = g(M_1) = M'$$

Isométries du plan

1) a) on appelle isométrie du plan, toute transformation du plan qui conserve la distance.
   b) on appelle déplacement, toute isométrie du plan qui conserve les angles orientés

   c) toute isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé est appelée un antidéplacement (ou isométrie négative).

2) <u>Effets sur les configurations</u>. Par une isométrie :
- une droite, un segment, un cercle a pour image (respectivement) une droite, un segment, un cercle de centre O' image de O ; où O est le centre du cercle de départ.
- Le milieu d'un segment, les points d'intersection, les points de contact, les aires, les mesures des angles, le parallélisme, l'orthogonalité, sont conservés.

3) a)

Points invariants	Nature de l'isométrie
Aucun	Translation ou symétrie glissée
Un seul point invariant	Rotation de centre O
Deux points invariants A et B et ≠ idp	Symétrie orthogonale d'axe (AB)
Trois points invariants non alignés	Application identique

b) <u>classification à partir de la conservation des angles orientés</u>.

	Nature de l'isométrie
Conservant les angles orientés	Déplacements (ou isométries positives)
Transformant les angles orientés en leurs opposés	Antidéplacement (ou isométries négatives)

<u>En fonction des points invariants.</u>

isométrie	Ne possédant aucun point invariant	Possédant au moins un point invariant
Déplacement	translation	rotation
antidéplacement	Symétrie glissée	Symétrie orthogonale

Chapitre : *SIMILITUDES PLANES DU PLAN*

Définition

Une similitude directe du plan est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel λ strictement positif et qui conserve les angles orientés.

Le réel λ strictement positif est appelé le rapport de la similitude directe.

Pour tous points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, d'images respectives A', B', C' et D' par une similitude directe de rapport λ, on a : $A'B' = \lambda AB$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

Théorème

Toute similitude directe de rapport k $(k > 0)$ est la composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement.

Similitudes directes et configurations

- Une similitude directe transforme : un segment en un segment, une droite en une droite, un cercle en un cercle, une conique en une conique de même excentricité.
- Une similitude directe conserve : le parallélisme, l'orthogonalité, le contact, les barycentres.
- Une similitude directe de rapport k $(k > 0)$, multiplie les distances par k et les aires par k^2.

Transformation définie par : $z \mapsto az + b \quad (a \neq 0)$.

La transformation f dont une écriture complexe est de la forme : $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, est une similitude directe du plan :

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle θ. (θ étant un argument de a). On dit alors que f est une similitude à centre.

Dans ce cas f peut s'écrire $f = h \circ r = r \circ h$ où h est une homothétie et r une rotation de même centre que h. On dit alors que $h \circ r$ est la forme réduite de f.

Propriété

Soit f une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

Pour tout point M et M' du plan distincts de Ω, on a : $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} = \theta \end{cases}$.

Théorème (admis)

Etant donné quatre points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une similitude directe f et une seule telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Le rapport de f est $\frac{A'B'}{AB}$ et son angle $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})}$.

Remarques

- Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$ ($k \neq 1$), alors f est une homothétie.
- Si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$ et $A'B' = AB$ alors f est une rotation.

Définition

Soit f une similitude directe du plan de rapport k et d'angle θ.

L'application φ de $\overrightarrow{\wp}$ dans $\overrightarrow{\wp}$ qui au vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ associe le vecteur $\varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{A'B'}$ où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ est appelée similitude directe vectorielle associée à f.

Remarque

- $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors le vecteur $\overrightarrow{v'} = \varphi(\vec{v})$ est caractérisé par : $\left\|\overrightarrow{v'}\right\| = k\|\vec{v}\|$ et $\widehat{(\vec{v}, \overrightarrow{v'})} \equiv \theta\ [2\pi]$.

L'application φ est appelée similitude directe vectorielle de rapport k et d'angle θ.

Linéarité

Soit φ la similitude vectorielle associée à une similitude directe f.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel λ,

On a : $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$ et $\varphi(\lambda\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{v})$. On dit que φ est linéaire.

Chapitre : *TRANSFORMATIONS DE L'ESPACE*

Ce sont:

La translation de vecteur $\vec{u}$ notée $t_{\vec{u}}$ est l'application de l'espace dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

L'homothétie de centre O et de rapport k est une application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$

La réflexion d'axe la droite (D) : c'est la transformation qui laisse invariant chaque point de (D) et qui à chaque point n'appartenant pas à (D) associe le point M' tel que (D) soit la médiatrice de [MM'] dans le plan défini par M et (D).
La réflexion de plan (P) : c'est la transformation qui laisse invariant chaque point de (P) et qui, à chaque point M n'appartenant pas à (P) , associe e point M' tel que (P) soit le plan médiateur du segment [MM'].

(D) est une droite et $\vec{k}$ un vecteur unitaire de (D) orientant la droite (D) (ainsi tout plan (Q) perpendiculaire à (D) est orienté). La rotation d'axe (D) orienté par $\vec{k}$ et d'angle α est la transformation définie par les conditions suivantes :
- Si M n'est pas sur (D), soit m le projeté orthogonalité de M sur (D) et par (Q) le plan passant par m et orthogonal à (D). Le point M', image de M par la rotation est le point du plan (Q) tel que : mM'=mM et $(\overrightarrow{mM}, \overrightarrow{mM'}) = \alpha$;
-Si M est sur (D), alors M'=M
La rotation d'axe (D) et d'angle π est la réflexion d'axe (D) ; on appelle cette transformation le demi-tour d'axe (D)

Propriétés
Ces transformations :
-conservent le barycentre
-conservent le parallélisme
-conservent l'orthogonalité
Les translations, les réflexions et les rotations sont des isométries ; elles conservent la distance, ainsi que les aires planes et les volumes, alors qu'une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2et les volumes par $|k|^3$

Chapitre : *CONIQUES*

Définition

Soit (D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D) et e un réel strictement positif. Pour tout point M du plan, on note H le projeté orthogonal de M sur (D).
L'ensemble (C) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ est appelé conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

- Si $e = 1$, la conique est appelée une parabole.
- Si $e > 1$, la conique est appelée une hyperbole.
- Si $0 < e < 1$, la conique est appelée une ellipse.

Axe focal

a. Définition

Soit (C) une conique de foyer F et de directrice (D).

La droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à (D) est appelée axe focal de la conique (C).

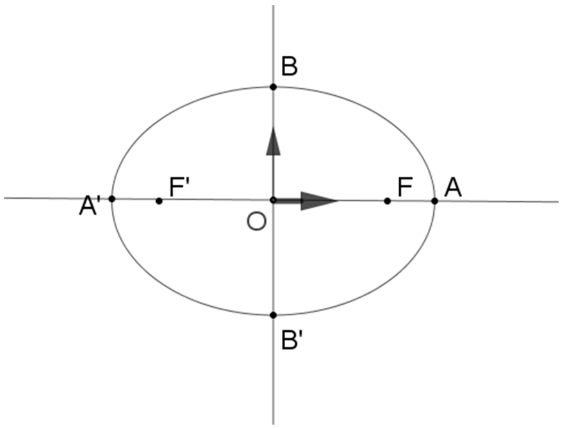
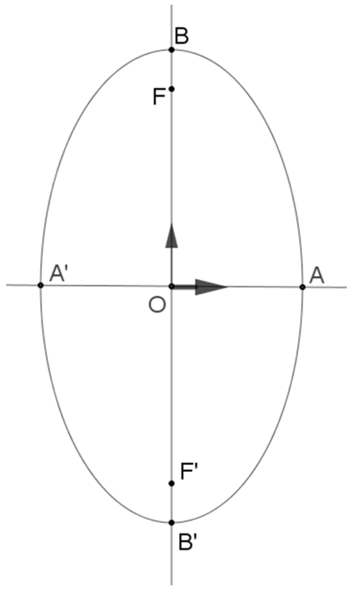
b. Propriété

Toute conique admet son axe focal comme axe de symétrie.

Les éléments caractéristiques de l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $(a > 0 \ et \ b > 0)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont :

Le centre : O ; les axes : (Ox) et (Oy) ; les sommets : $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$.

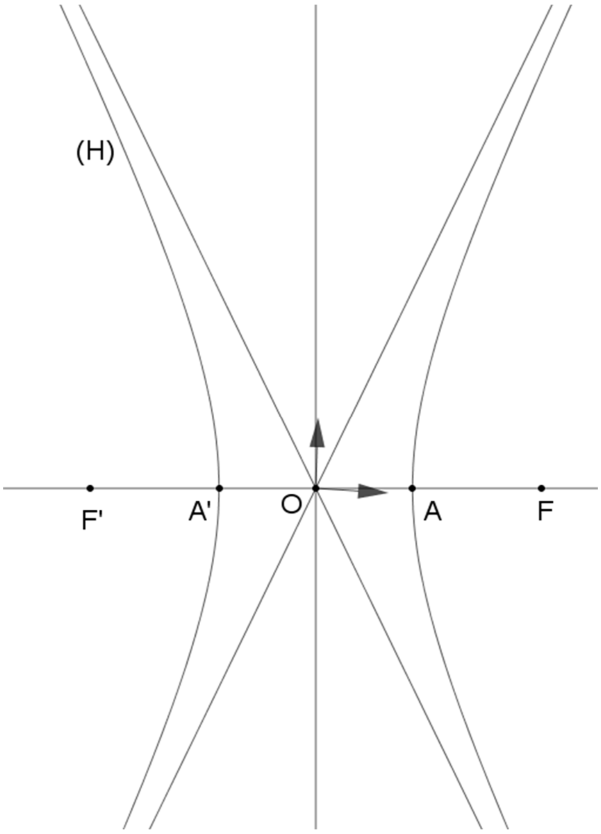
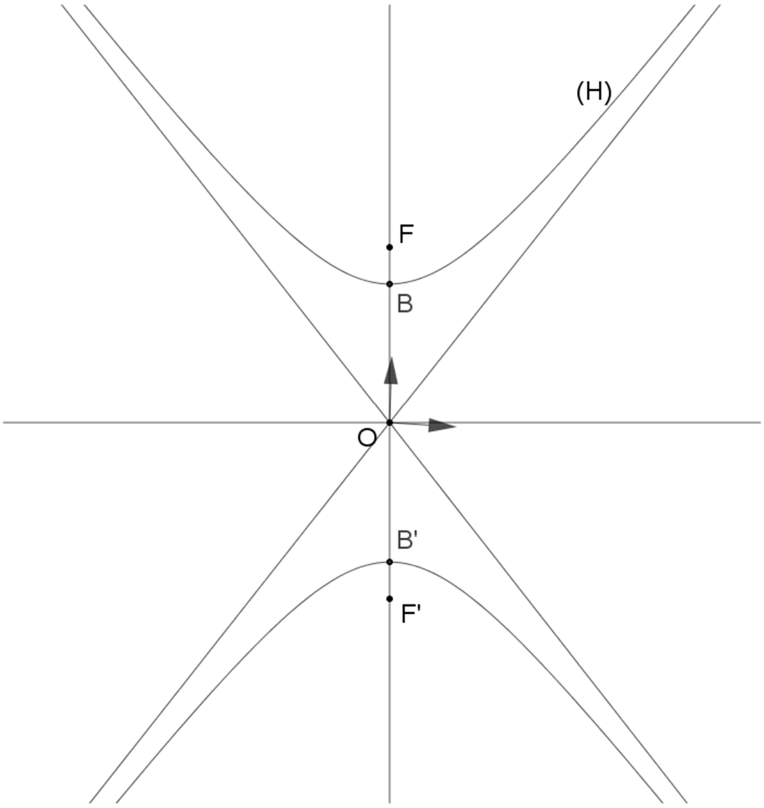
<u>$a > b$</u>	<u>$a < b$</u>
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité : $e = \frac{c}{a}$	Excentricité : $e = \frac{c}{b}$
Foyers : $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$	Foyers : $F(0, c)$ et $F'(0, -c)$
Directrices : $(D): x = \frac{a^2}{c}$ et $(D'): x = -\frac{a^2}{c}$	Directrices : $(D): y = \frac{b^2}{c}$ et $(D'): y = -\frac{b^2}{c}$
Axe focal : (Ox)	Axe focal : (Oy)

Grand axe : $[AA']$ Petit axe :$[BB']$ Cercle principal : $C(O;a)$ Cercle secondaire :$C(O;b)$  	Grand axe : $[BB']$ Petit axe :$[AA']$ Cercle principal : $C(O;b)$ Cercle secondaire :$C(O;a)$ 

Les éléments caractéristiques de l'hyperbole (H) d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $(a > 0\ et\ b > 0)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont :

Le centre: O ; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; asymptotes :les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$

$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(H): -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Excentricité : $e = \frac{c}{a}$	Excentricité : $e = \frac{c}{b}$
Sommets : $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$	Sommets : $B(0, b)$ et $B'(0; -b)$
Directrices : $(D): x = \frac{a^2}{c}$ et $(D'): x = -\frac{a^2}{c}$	Directrices : $(D): y = \frac{b^2}{c}$ et $(D'): y = -\frac{b^2}{c}$

Foyers : $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$ Axe focal : (Ox) 	Foyers : $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$ Axe focal : (Oy) 

Représentations paramétriques de l'ellipse

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'ellipse (E) d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est la courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t)=acost \\ y(t)=bsint \end{cases}$, $t\in[0;2\pi]$.

Plus généralement, l'ellipse d'équation $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ est la courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t)=acost+\alpha \\ y(t)=bsint+\beta \end{cases}$, $t\in[0\,;2\pi]$. (NB :On peut prendre tout intervalle d'amplitude 2π.)

Lien entre cercle et ellipse par une affinité orthogonale plane.

Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b>0$; de sommets A et A' situés sur l'axe focal.

L'ellipse (E) est l'image du cercle de diamètre $[AA']$ par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

Remarque : si l'on note B et B' les sommets de l'ellipse non situés sur l'axe focal alors (E) est l'image du cercle de diamètre $[BB']$ par l'affinité orthogonale d'axe (BB') et de rapport $\frac{a}{b}$.

Chapitre : *PROBABILITES*

Définition.
Des événements sont dits équiprobables lorsqu'ils ont les mêmes chances de se réaliser.
Soit E l'univers associé à un phénomène aléatoire et A un événement, on définit la probabilité de A par: $P(A) = \frac{CardA}{CardE}$
Remarque: toute probabilité appartient à [0;1].

Propriétés.
A et B étant des événements de E, on a:
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$; $P(\overline{A}) = 1-P(A)$;
si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

Variables aléatoires réelles

Définitions

Définition1:
soit E l'univers associé à un phénomène aléatoire.
On appelle variable aléatoire réelle, toute application de E dans IR.
Soit $X: E \rightarrow IR$ une variable aléatoire réelle.
X(E) est appelé l'univers image de la variable X; c'est l'ensemble des valeurs que X peut prendre. Elle est dite discrète si X(E) est dénombrable.

Définition2:
soit $X: E \rightarrow IR$ une variable aléatoire réelle avec $X(E) = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$
La loi de probabilité de X est l'ensemble des couples (xi, P(X=xi)) pour i= 1,2,…,n

Fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Définition3:
soit $X: E \rightarrow IR$ une variable aléatoire réelle.
On appelle fonction de répartition de X, la fonction réelle $F: IR \rightarrow [0;1]$ définie par:
$F(x) = P(X\leq x)$.
Remarque: la représentation graphique de F est une fonction en escaliers.

Espérance mathématique, variance et écart type d'une variable aléatoire.

Définition4:
soit X une variable aléatoire réelle avec $X(E) = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

On appelle espérance mathématique de X, le réel noté: $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \times P(X = x_i)$

Définition5:
soit X une variable aléatoire réelle avec $X(E) = \{x_1,x_2,\ldots x_n\}$.

On appelle variance de X, le réel positif noté: $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 . P(X = x_i)$.

Remarque. On peut aussi utiliser la formule suivante : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

De même l'écart type de X est: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Probabilité conditionnelle

Soit E l'univers associé à un phénomène aléatoire et B un événement tel que $P(B) \neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que B est réalisé est: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

ce qui est équivalent à $P(A\cap B) = P(A/B) . P(B)$

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si : $P(A\cap B) = P(A).P(B)$

Conséquence: si A et B sont indépendants, alors $P(A/B) = P(A)$

La loi binomiale.

Le phénomène ici est caractérisé par:

l'existence de n épreuves identiques, chaque épreuve étant indépendante de la précédente et ne comportant que deux issues possibles; donc la même épreuve est répétée n fois.

En prenant une épreuve, on a deux éventualités: le succès S avec une probabilité $P(S) = p$, $p \in]0;1[$ et l'échec E avec une probabilité $P(E) = 1-p$. Ainsi, on dit que l'on a une loi binomiale de paramètres n et p définie par:

$X(E) = \{0;1;\ldots;n\}$ et pour tout $k \in \{0;1;\ldots;n\}$, $P(X=k) = C_n^k\, p^k . (1-p)^{n-k}$.

L'espérance mathématique d'une loi binomiale est : $E(X) = n.p$

La variance mathématique d'une loi binomiale est : $V(X) = n.p.(1-p)$.

Chapitre : *LIMITES-CONTINUITE-CALCUL DIFFERENTIEL-ETUDE DE FONCTIONS*

Définitions

$*$ Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* de IR contenant x_0. On dit que *f* est **continue** en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$.

$*$ Soit *f* une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0 \,;\, x_0+h[$ ($h>0$). On dit que *f* **est continue à droite** en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0)$.

$*$ Soit *f* une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0-h \,;\, x_0]$ ($h>0$). On dit que *f* **est continue à gauche** en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0)$.

Remarque

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ contenant x_0. Pour que *f* soit continue en x_0, il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche en x_0.

Théorème

Si une fonction *f* est dérivable sur un intervalle *I*, alors elle est continue sur *I*.

Remarque

La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie ; c'est-à-dire :si une fonction est continue en un point x_0, elle n'est pas nécessairement dérivable en x_0.

Propriété et définition

Si une fonction *f*, continue sur $]a \,;\, b]$ admet une limite *l* en *a*, alors la fonction *g* définie sur $[a \,;\, b]$ par $\begin{cases} g(x)=f(x) \text{ si } x\neq a \\ g(a)=l \end{cases}$ est une fonction continue sur $[a \,;\, b]$ appelée **prolongement par continuité** de *f* en *a*. (résultat analogue sur un intervalle du type $[a \,;\, b[$).

Théorème admis

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$.
Si *f* est strictement monotone sur *I* alors :

1. L'image $f(I)$ est un intervalle et *f* réalise une bijection de *I* sur $f(I)$.
2. La fonction réciproque f^{-1} de *f* est strictement monotone et a le même sens de variation que *f*.
3. Dans un plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative de f^{-1} est symétrique de celle de *f* par rapport à la droite d'équation $y=x$ (première bissectrice).

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

Tout nombre réel compris entre f(a) et f(b) a au moins un antécédent par f compris enter a et b.

Conséquence 1

Soit f : [a ;b] → IR une fonction continue et vérifiant $f(a).f(b)<0$. L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $c\in]a\ ;b[$.

Conséquence 2 (contraposée de la Conséquence 1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si f ne s'annule pas sur I, alors f garde un signe constant sur I.

Inégalité des accroissements finis

Etant donné une fonction f dérivable sur un segment [a , b],

- si $m \leq f'(x) \leq M$ et si $a \leq b$ alors : $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$
- si $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$

Théorème

Soient *f* et *u* deux fonctions.

Si *u* est une fonction dérivable en x_0 et *f* une fonction dérivable en $u(x_0)$, alors $f\circ u$ est une fonction dérivable en x_0 et $(f\circ u)'(x_0)=f'(u(x_0))\times u'(x_0)$.

Théorème

- Soit *u* une fonction non nulle dérivable sur un intervalle *I* et *n* un entier relatif

. La fonction u^n est dérivable sur *I* et $(u^n)=nu^{n-1}\times u'$.

- Soit *u* une fonction strictement positive dérivable sur un intervalle *I* et α un réel.

La fonction u^α est dérivable sur *I* et $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}\times u'$.

Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction *f*, on procède comme suit :
1.Ensemble de définition
2.Parité-Périodicité (éventuellement)
3.On dresse le tableau de variations de *f*.
Cela exige souvent de dériver la fonction *f*, de déterminer le signe de f' et d'étudier les limites de *f* aux bornes de l'ensemble d'étude.
Un tableau de variations doit indiquer (si possible) :
– Les points où les tangentes sont horizontales ou verticales
– Les points anguleux

– Les asymptotes horizontales et verticales

4.On étudie les branches infinies

a et b désignent respectivement les limites, lorsque x tend vers +∞ (ou - ∞), de $\frac{f(x)}{x}$ et de $f(x) - ax$.

a= +∞ ou a= -∞		Branche parabolique de direction celle de (OJ)
a un réel	b un réel	La droite d'équation y = ax+b est asymptote
	b = +∞ ou b = -∞	Branche parabolique de direction celle de la droite d'équation y = ax
	b n'existe pas	Direction asymptotique, celle de la droite d'équation y=ax
A n'existe pas		Ni asymptote, ni direction asymptotique, ni branche parabolique

5.On détermine (si possible) les points où la courbe représentative de *f* coupe les axes des coordonnées et les asymptotes.

Chapitre : ***PRIMITIVES***

PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

1. DEFINITION

Théorème 1 : Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.

Théorème 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f admet une primitive F sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme F + k où k décrit IR. En particulier, si x_0 est un réel de I et y_0 un réel quelconque, il existe une unique primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0.

A RETENIR

I est un intervalle tel que	**Fonction f**	**Primitives F (k ϵIR)**
I ⊂ IR	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
I ⊂ IR	$x \mapsto 1$	$x \mapsto x+k$
I ⊂ IR	$x \mapsto x^n (n \in IN^*)$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}+k$
I ⊂ IR*	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}+k$
I ⊂ IR*	$x \mapsto \frac{1}{x^n}(n \in IN^* et n \neq 1)$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+k$
I ⊂ IR*₊	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+k$
I ⊂ IR	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x+k$
I ⊂ IR	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x+k$
$I \subset IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ ou $x \mapsto 1+\tan^2 x$	$x \mapsto \tan x+k$

I est un intervalle tel que	**Fonction *h***	**Primitives H**
I ⊂ IR	af + bg(a et b des réels)	aF + bG + k
I ⊂ IR	$f^n f'$ (n ϵ IN)	$\frac{f^{n+1}}{n+1}+k$
I ⊂ IR et f ne s'annulant pas sur I	$\frac{f'}{f^n}$, n ϵ IN et n ≥ 2	$-\frac{1'}{(n-1)f^{n-1}}+k$
I ⊂ IR et f strictement positive sur I	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}+k$
I ⊂ IR et ax + bϵ I)	$\mapsto ag(ax+b)$	$x \mapsto G(ax+b)+k$
I ⊂ IR	$g \circ f . f'$	$G \circ f + k$

Chapitre ***: FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN***

1) DEFINITION ET CONSEQUENCES

Définition : La fonction « inverse » est une fonction définie et continue sur]0 ; + ∞[. Elle admet donc une primitive et une seule définie sur]0 ; +∞[et s'annulant en $x_0 = 1$. Cette primitive, notée ln, est appelée logarithme népérien.

Propriété 1 :

- L'ensemble de définition de la fonction ln est]0 ; + ∞[.
- La fonction ln est dérivable sur]0 ; +∞[et pour tout nombre réel x de]0 ; +∞[,
  $\left(\ln\right)'(x) = \frac{1}{x}$
- ln 1 = 0.

ln est dérivable sur]0 ; +∞[donc ln est continue sur]0 ; +∞[. On a $\left(\ln\right)'(x) = \frac{1}{x}$ et

$\forall x \in]0 : +\infty[, \frac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante sur]0 ; + ∞[; ce qui permet de dire que ln est une bijection de]0 ; + ∞[sur ln(]0 ; + ∞[)

Propriété 2 : Quels que soient les nombres réels a et b strictement positifs :

- ln a = ln b si et seulement si a = b
- ln a > ln b si et seulement si a > b

Remarque : Puisque ln1 = 0, la propriété 2 implique que :

- ln x < 0 si et seulement si 0 < x < 1
- ln x > 0 si et seulement si x > 1

2) PROPRIETES LIEES A LA DERIVATION

La fonction ln est dérivable sur]0 ; + ∞[et $\left(\ln\right)'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$(\ln)'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} \Leftrightarrow (\ln)'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} \Leftrightarrow (\ln)'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution : $\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

a) Dérivée de $\ln \circ u$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I, la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur]- ∞ ; - 3[par $f(x) = \ln \frac{x+3}{x-2}$. Calculons f '(x).

Posons $u(x) = \frac{x+3}{x-2}$ donc $u'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$; alors $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{x+3} = \frac{-5}{(x-2)(x+3)}$

b) Recherche de primitives

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors les primitives de la fonction $f = \frac{u'}{u}$ sont les fonctions F_k définies sur I par $F_k(x) = (\ln \circ u)(x) + k$ où k est une constante réelle.

Chapitre : *FONCTIONS EXPONENTIELLES - FONCTIONS PUISSANCES*

Définition

La fonction exponentielle, notée **exp**, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

ln :]0 ; +∞[→IR et exp : IR →]0 ; +∞[ou encore :

Pour tout réel x et pour tout réel $y > 0$, $y = \exp x$ si et seulement si $x = \ln y$.

∗ En particulier on a :

- $\mathbf{exp0 = 1}$ **car** $\mathbf{ln1 = 0}$
- $\mathbf{exp1 = e}$ **car** $\mathbf{lne = 1}$
- $\mathbf{exp(-1) = \frac{1}{e}}$ **car** $\mathbf{ln\frac{1}{e} = -1}$

Conséquences

- Pour tout réel x, $\mathbf{\ln(\exp \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}}$
- Pour tout réel x de $]0\ ;+\infty[$, $\mathbf{\exp(\ln \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}}$
- Pour tout réel x, $\mathbf{\exp \boldsymbol{x} > 0}$

Remarque

La fonction exp : IR →]0 ; +∞[est, comme la fonction ln, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

Notation $\mathbf{e^x}$

Pour tout entier relatif n, $\ln e^n = n$. Par définition de la fonction exp.

$\ln e^n = n \Leftrightarrow e^n = \exp(n)$.

On convient d'étendre cette égalité à tout réel x.

Définition

Pour tout x ∈ IR, on pose $e^x = \exp(x)$. D'où on a :,

- $e^1 = e$
- $e^0 = 1$
- $e^{-1} = \frac{1}{e}$
- Pour tout réel x, $\ln e^x = x$
- Pour tout réel $x > 0$ x, $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel x, $e^x > 0$

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Formules fondamentales

Pour tous réels *a* et *b*, on a :

- $\mathbf{e}^{a+b} = \mathbf{e}^a \times \mathbf{e}^b$
- $\mathbf{e}^{-b} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}^b}$
- $\mathbf{e}^{a-b} = \dfrac{\mathbf{e}^a}{\mathbf{e}^b}$
- $\left(\mathbf{e}^a\right)^p = \mathbf{e}^{ap}$; p∈ IR

Ces formules montrent l'intérêt de la notation e^x , car ces résultats se retiennent en utilisant les règles habituelles sur les exposants.

Théorème

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Ensemble de définition

Soit *u* une fonction définie sur un intervalle *I*. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto u(x)$.

Limites

a. Soient *u* et *f* deux fonctions numériques définies sur un intervalle *I*. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty \; ; +\infty\}$
.

- $\lim_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
- $\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$

$\lim_{x \to x_0} u(x) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^{u(x)} = e^a$

Théorème

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et :

$\left(e^u\right)' = u'e^u$

Théorème

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par $f\left(x\right) = u'\left(x\right)e^{u(x)}$ admet des primitives sur I et ces primitives F sont définies par : $F\left(x\right) = e^{u(x)} + k$,k∈ Z

Equations

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, a et b sont des réels.
- $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$, $a > 0$

Inéquations

- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$, a et b sont des réels.
- $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$, $a > 0$

Définition

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b : $\mathbf{a^b = e^{b\ln a}}$.

Règles de calcul

Si $a > 0$, $b > 0$, $x \in$ □ et $y \in$ □ , alors :

$a^x \cdot b^x = \left(ab\right)^x$; $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x \cdot a^{-x} = 1$; $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$; $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Définition

On appelle **fonction puissance** α (α∈ IR) la fonction : f_α :]0 ; +∞[→IR

$$x \mapsto x^\alpha \text{ avec } x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Conséquence

Pour tout $x > 0$, $x^\alpha > 0$.

Théorème

Si u est une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors pour tout α∈ IR* la fonction u^α est dérivable sur I et $\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

Conséquence

Sur l'intervalle I, u^α est une primitive de $\alpha u^{\alpha-1}u'$, ce que l'on peut énoncer :

Si $\alpha \neq -1$, alors $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$ est une primitive de $u^{\alpha}u'$ ($u>0$).

Cas particulier

Si $\alpha=-1$ on a : $u'u^{-1}=\frac{u'}{u}$ et une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|+k$; k∈Z

Théorème

Pour $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}\ln x=0$.

Théorème

Pour tout réel α, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\alpha}}=+\infty$ et.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}e^{-x}=0$

Chapitre : *SUITES NUMERIQUES*

I. RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Le raisonnement par récurrence permet de justifier qu'une proposition P(n) dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné. Il se résume en trois étapes :

- Initialisation : vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : établir que pour tout entier k donné, $k \geq n_0$, si P(k) est vraie alors P(k + 1) est vraie.
- Conclusion : une fois que les deux étapes précédentes sont établies, on conclut que P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

II. SENS DE VARIATIONS D'UNE SUITE NUMERIQUE

1) DEFINITION

Soit (U_n) une suite définie sur une partie E de IN

- (U_n) est croissante si $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout n de E.
- (U_n) est décroissante si $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout n de E.
- (U_n) est constante si $U_{n+1} = U_n$ pour tout n de E.

2) METHODES PRATIQUES

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (U_n), on pourra :

- Etudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$
- Si la suite est à termes strictement positifs, comparer le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.
- Etudier le sens de variation de la fonction f si (U_n) est définie par $U_n = f(n)$
- Faire un raisonnement par récurrence.

III. SUITES MAJOREES-SUITES MINOREES

Définition

Soit (U_n) une suite définie sur une partie E de IN.

- (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que $U_n \leq M$ pour tout n de E.
- (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que $U_n \geq m$ pour tout n de E.
- (U_n) est bornée si (U_n) est majorée et minorée.

IV. LIMITE D'UNE SUITE NUMERIQUE

1) NOTION DE LIMITE D'UNE SUITE

- Pour certaines suites numériques (U_n), tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel ℓ. Dans ce cas on dit que la suite (U_n) a pour limite ℓ et on écrit : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$.
- Pour certaines suites numériques (U_n), tous les termes à partir d'un certain rang ont leur valeur absolue aussi grande que l'on veut. Dans ce cas on dit que la suite (U_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ et on écrit : $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

2) DEFINITION

Une suite numérique (U_n) est convergente si elle admet une limite finie.
Une suite non convergente est dite divergente.

3) PROPRIETES

- ✓ Si une suite numérique admet une limite alors cette limite est unique.
- ✓ Soit (U_n) la suite numérique de terme général $U_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$. Si $\lim_{n\to+\infty} f(x) = \ell$ (réel ou infini) alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

4) CONVERGENCE D'UNE SUITE NUMERIQUE

- ✓ Une suite croissante et majorée est convergente
- ✓ Une suite décroissante et minorée est convergente.

V. SUITES ARITHMETIQUES- SUITES GEOMETRIQUES

	Suite arithmétiques de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
Relation entre U_n et U_p $(p \leq n)$	$U_n = U_p + (n - p)\,r$	$U_n = U_p.q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs $S= U_p+U_{p+1}+\ldots+U_N$ $(p \leq N)$ $N - p + 1$ termes	$S = \dfrac{(N-p+1)(U_p+U_N)}{2}$	$S = \dfrac{1-q^{N-p+1}}{1-q}U_p$, si $q \neq 1$ $S = (N - p + 1)U_p$ si $q = 1$

CONVERGENCE DES SUITES ARITHMETIQUES ET DES SUITES GEOMETRIQUES

Propriété 1

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q. U_n est de la forme $U_n = k \times q^n$

- Si q = 1, alors la suite (U_n) converge vers son premier terme.
- Si $q \in]-1 ; 1[$, alors la suite (U_n) converge vers 0.
- Dans tous les autres cas, la suite (U_n) est divergente

Propriété 2

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r. U_n est de la forme $U_n = b + r\,n$.

- Si r = 0, alors la suite (U_n) est convergente
- Si $r \neq 0$, alors la suite (U_n) est divergente

*Quelques énoncés admis sur les limites :

-Si, à partir d'un certain rang, $x_n \geq u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

-Si, à partir d'un certain rang, $x_n \leq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

-Si, à partir d'un certain rang, $|x_n - L| \leq u_n$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$.

-Si à patir d'un certain rang, $v_n \leq x_n \leq u_n$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$.

-Si à partir d'un certain rang, $x_n \leq u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L'$ alors $L \leq L'$.

*Toute suite croissante et majorée converge.

*De même, toute suite décroissante et minorée converge.

*Soit la suite u de IN vers IN définie par : $u(n) = a^n$.

Si $a \leq -1$, alors u n'admet pas de limite

Si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$

Si a = 1, alors u est constante et u(n) =1 pour tout n de .

Si a > 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$ et u diverge

* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$

*-Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$; en effet $n^{\alpha} = e^{\alpha \ln(n)}$

-Si $\alpha = 0$, alors $n^{\alpha} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 1$

-Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty$

*Résolution d'équations $f(x) = 0$

La méthode de dichotomie

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] tel que $f(a).f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle [a,b].

En supposant l'existence d'une unique solution x_0 dans [a,b], on peut calculer $f(\frac{a+b}{2})$. En comparant son signe avec ceux de f(a) et f(b), on peut préciser dans lequel des deux intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2}, b]$ se situe la solution x_0. En réitérant ce procédé plusieurs fois, on obtient un encadrement de plus en plus fin de x_0.

Chapitre : *Calcul intégral*

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et F une primitive de f sur I. Etant donnés deux éléments a et b de I, on pose : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Notation

Ce nombre est appelé intégrale de f entre a et b. On note souvent $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$.

Remarque 1

La fonction $g : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f définie sur I, s'annulant en a.

Remarque 2

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre. On a :
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(z)\,dz = \ldots$ On dit que x est une **variable "muette".**

Théorèmes

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c sont trois réels de I. F et G des primitives respectives des fonctions f et g ; α et β deux réels quelconques. On a :

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (inversion des bornes)
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$ (linéarité de l'intégrale)
- Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (positivité)

  Remarque

  La réciproque est fausse.

Conséquence

Si $a \leq b$ et $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ (comparaison d'intégrales).

Remarque

La réciproque est fausse.

Propriété 1

Soient m et M des nombres réels. Soit f une fonction continue et bornée sur $[a\ ;b]$ telle que pour tout réel x de $[a\ ;b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Si $a<b$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Propriété 2

Soit k un nombre réel positif, f une fonction continue et bornée sur $[a\ ;b]$ telle que pour tout réel x de $[a\ ;b]$, $|f(x)| \leq k$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq k(b-a)$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0. Soit a un élément de I.

- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

Théorème

Soit f une fonction continue sur IR, périodique de période T. Pour tout réel a, on a : $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les fonctions dérivées sont continues sur I.

Si a et b sont deux éléments de I, alors : $\mathbf{\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt}$

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$. Dans un repère orthogonal $\left(0\ ;\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, l'aire du domaine défini par $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$ est $\int_a^b f(t)\,dt$. u.a

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \le 0$. Dans un repère orthogonal l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b -f(x)\,dx\ \ u \cdot a$

Théorème 3 (admis)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$ telles que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \le g(x)$. Dans un repère orthogonal l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f et g et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est : $\mathscr{A} = \int_a^b \left|g(x) - f(x)\right| dx\ \ u \cdot a$

Chapitre : *EQUATIONS DIFFERENTIELLES*

I. DEFINITION

On appelle équation différentielle, une équation où l'inconnue est une fonction f de IR vers IR et dans laquelle apparaît au moins une des dérivées successives de f.
Exemples : $y' + 2y = x^2$ est une équation différentielle du premier ordre et
$y'' - 4y' + 7y = 0$ est une équation différentielle du second ordre.
Remarque : résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation.

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $y' - my = 0$ ($m \in$ IR).

- La fonction nulle est solution de (E).
- Déterminons les solutions non nulles de (E).

On a : $y \neq 0$, $y' - my = 0 \Leftrightarrow y' = my \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = m \Leftrightarrow \ln|y| = mx + c$; $c \in$ IR $\Leftrightarrow |y| = e^{mx+c}$; $c \in$ IR
$\Leftrightarrow y = e^{mx+c}$ ou $y = -e^c e^{mx} \Leftrightarrow y = Ke^{mx}$ avec $K \in$ IR*.

Propriétés

- Les solutions de l'équation différentielle $y' - my = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{mx}$ avec $K \in$ IR.
- Il existe une unique solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 sont des réels donnés).

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : $ay'' + by' + c y = 0$

.Soit l'équation différentielle sans second membre (F) : $ay'' + by' + c y = 0$; on appelle équation caractéristique, l'équation : $ar^2+b r + c = 0$.
Les solutions de (F) vont dépendre des racines de cette équation caractéristique.

1er cas : $\Delta > 0$, alors on a 2 racines réelles $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et (F) a comme solutions $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$.

2ème cas : $\Delta = 0$, alors on a une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$ et (F) a comme solutions $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in$ IR*) sont les fonctions : $x \mapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x$ avec A et B des nombres réels.
Il existe une unique solution f de cette équation différentielle vérifiant des conditions initiales données.

EPREUVES

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU **Office du Baccalauréat** **........................** **Série C-E**	**Année 2011** **Session normale** **Epreuve du 1er tour** **Durée: 4 heures** **Coefficient: 6**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (3) pages.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 (4 points)

Le clavier d'un téléphone portable comporte dix touches numériques notées $0; 1; 2; ...; 9$. Ce téléphone est activé par une puce électronique dont le code PIN de quatre chiffres deux à deux distincts, composé à partir du clavier, est imposé par l'opérateur de téléphonie mobile. Ce code secret peut être par exemple 0425.

Le propriétaire a oublié le code secret de son téléphone.

1) Quelle est la probabilité qu'il ouvre le téléphone par hasard au premier essai ?

2) Un matin, on constate que la touche $\ll 8 \gg$ est devenue défectueuse et ne s'affiche plus, de sorte que lors de la validation d'une combinaison contenant 8, le téléphone émette un signal sonore.

Quelle est la probabilité que le téléphone émette un signal sonore?

3) Le clavier a été réparé et la touche $\ll 8 \gg$ fonctionne maintenant à merveille.

a) Le propriétaire se rappelle que le code commence par un multiple non nul de 3. Quelle est la probabilité qu'il ouvre le téléphone au premier essai ?

b) On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque combinaison testée par le propriétaire, donne le nombre de chiffres pairs non nuls contenus dans la combinaison.

Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

Exercice 2 (4 points)

Soit r un réel strictement positif et θ un réel appartenant à l'intervalle $]0; \pi[$.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $z_0 = re^{i\theta}$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

On pose : pour tout entier naturel n, $U_n = |z_n|$.

1)

a) Démontrer que la suite numérique (U_n) de terme général U_n est décroissante.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

2)

a) Démontrer que pour tout réel x, on a : $e^{ix}+1=2e^{i\frac{x}{2}}\times\cos\frac{x}{2}$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $z_n=\dfrac{r\sin\theta}{2^n\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}\times e^{i\frac{\theta}{2^n}}$.

c) En déduire $\mathrm{Re}\,(z_n)$ et $\mathrm{Im}\,(z_n)$ pour tout entier naturel n ; $\mathrm{Re}\,(z_n)$ et $\mathrm{Im}\,(z_n)$ désignant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z_n.

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{Im}\,(z_n)$.

4)

a) Démonter que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)\right)=\theta$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{Re}\,(z_n)$.

5) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

<u>Problème</u> (12 points)

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormal direct $R=\left(O,\,\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

A tout point M de coordonnées (x,y) dans ce repère, on associe le nombre complexe $z=x+iy$.

<u>Partie A</u>

On appelle $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées (x,y) vérifient, $8(x+y)^4+36(x-y)^3+36(x-y)^2-72xy(x^2+y^2)=0$ et on considère l'application f de P dans P qui, à tout point $M(x,y)$ d'affixe $z=x+iy$ associe le point $M'\,(X,Y)$ d'affixe $Z=X+iY$ avec

$$\begin{cases} X=x-y+1\\ Y=x+y\end{cases}$$

1) Montrer que f admet un unique point invariant noté M_0 dont on précisera les coordonnées.

2)

a)Exprimer M_0M' en fonction de M_0M, M étant un point quelconque de P.

b) Montrer que le cosinus et le sinus de l'angle orienté de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M},\,\overrightarrow{M_0M'}}\right)$ sont indépendants du point M.

En déduire la mesure principale en radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M},\,\overrightarrow{M_0M'}}\right)$.

3) On admet qu'il existe un nombre réel k strictement positif et un nombre réel θ tels que pour tous points distincts M et N de P d'images respectives M' et N' par f ; on a :

$$\begin{cases} M'N'=kMN\\ \left(\widehat{\overrightarrow{MN},\,\overrightarrow{M'N'}}\right)=\theta\quad(2\pi)\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de k et de θ.

4)

a) Démontrer que $f = hor$ où h est l'homothétie de centre M_o et de rapport k et r la rotation de centre M_o et d'angle de mesure θ, k et θ étant les réels déterminés à la question **3)**.

b) En déduire la nature de l'application f et préciser ses éléments caractéristiques.

5) Déterminer l'expression de Z en fonction de z et en déduire les résultats de la question **4-b)**.

6) On note (Γ) l'image de $(\mathcal{C})$ par l'application f.

a) Démontrer que (Γ) est l'ensemble des points $M\,(X, Y)$ de P tels que : $Y^4 = 9(X^2 - 1)^2$.

b) En déduire que (Γ) est la réunion de deux coniques (Γ_1) et (Γ_2) dont on précisera les équations (on notera (Γ_1) la conique dont l'excentricité est la plus petite).

c) Construire (Γ) dans le repère $\mathcal{R}$.

d) Calculer en cm^3 le volume V engendré par la rotation de (Γ_1) autour de l'axe des abscisses.

Partie B

On note (Γ_1') l'image de (Γ_1) par l'application g définie de P dans P qui, à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}y \end{cases}$.

(Γ_1) est la conique de la partie **A**, question **6-b)**

1) Montrer que g est une application bijective.

2) Montrer que (Γ_1') est le cercle de centre O et de rayon 1.

3) Construire (Γ_1') dans le même repère que (Γ).

On note par la suite $(\Gamma_1'^*)$ la partie du plan constituée de points d'ordonnées positives et limitée par (Γ_1') et l'axe des abscisses.

4) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$. On note P_α le demi-plan formé des points $M\,(x, y)$ dont les coordonnées vérifient $(\cos\alpha)\,y - (\sin\alpha)\,x \leq 0$.

a) Etudier la position du point de coordonnées $(1, 0)$ par rapport à P_α.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Γ_1') avec la droite d'équation $(\cos\alpha)\,y - (\sin\alpha)\,x = 0$.

5) On note $A\,(\alpha)$ l'aire, exprimé en cm^2, de $P_\alpha \cap (\Gamma_1'^*)$.

Démontrer que, pour tout $\alpha \in [0, \pi]$, $A\,(\alpha) = A\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin 2\alpha - 4\int_0^{\cos\alpha} \sqrt{1 - x^2}dx$.

On distinguera les trois cas $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

6) Démontrer que la fonction $\alpha \mapsto A\,(\alpha)$ est dérivable sur $[0; \pi]$ puis déterminer $A'\,(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, \pi]$.

En déduire, pour tout $\alpha \in [0; \pi]$, l'expression de $A\,(\alpha)$ en fonction de α.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Série C-E

Année 2011
Session normale
Epreuve du $2^{\text{ème}}$ tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (3) pages.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 (4 points)

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction polynômiale P_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1)

a) Etudier le sens de variation de P_n sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $P_n(0)$ et $P_n(1)$.
b) En déduire que, pour $n \geq 2$, P_n admet une racine unique α_n dans $]0;1[$.

Donner la valeur exacte de α_2.

2)

a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (α_n). La suite (α_n) est-elle convergente ?

3)

a) Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a :

$$P_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}.$$

En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0.$$

b) Justifier, pour $n \geq 2$, que $\alpha_n \leq \alpha_2 < 1$ et $0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$.
c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points suivants :

$$A(1,-2,3),\ B(2,0,-3),\ C(-1,1,0) \text{ et } D(3,1,-2).$$

On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, -1)$ et $(B, 2)$; H le barycentre des points pondérés $(C; 3)$ et $(D; 2)$.

1)

a) Déterminer les coordonnées de chacun des points G et H.

b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{0}.$$

c) Le point $N(0, 0, -1)$ appartient-il à (Δ) ? Justifier.

2) Soit P le plan défini par la droite (GH) et le point $N(0, 0, -1)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de P.

b) Etudier la position relative de P et de la sphère S de centre C et de rayon $\dfrac{10\sqrt{286}}{143}$.

__Problème__ **(12 points)**

__Partie A__

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est concave sur I si pour tout couple (x, y) de $I \times I$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$
On dit que f est strictement concave sur I si pour tous x et y de I tels que $x \neq y$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) > \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$.

1)

a) Déterminer le signe de $\dfrac{e^a + e^b}{2} - e^{\frac{a+b}{2}}$, a et b étant des réels.
La fonction $x \mapsto e^x$ est-elle concave sur $\mathbb{R}$?

b) Montrer que la fonction logarithme népérien est strictement concave sur $]0, +\infty[$.

2) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est-elle strictement concave sur $\mathbb{R}^+$? justifier.

3) Soit h la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $h(x) = \sin x$.
Montrer que la fonction h est strictement concave sur $[0, \pi]$.

__Partie B__

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f''(x) < 0$.
Soit a un réel fixé et g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2} - f\left(\frac{x+a}{2}\right).$$

1) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée g'.

2)

a) Montrer que :

(i) si $x > a$, $g'(x) < 0$.

(ii) si $x < a$, $g'(x) > 0$.

b) En déduire que pour tout réel x, $g(x) \leq 0$ et que f est une fonction concave sur $\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par $\varphi(x) = \sin x + 2\sin\frac{x}{2}$.

a) Etudier les variations de φ sur $[0, \pi]$ et dresser le tableau de variations.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

c) Construire la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de φ dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 2 cm).

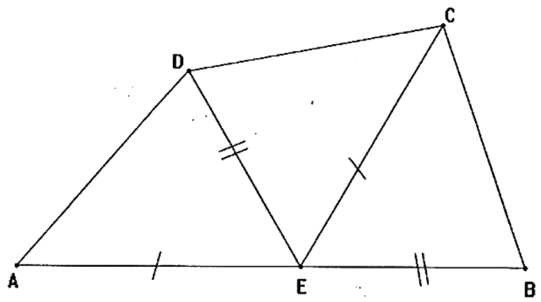
d) Calculer en cm^3 le volume V engendré par la rotation de $(\mathcal{C})$ autour de l'axe des abscisses.

Partie C

Dans le plan affine euclidien, on considère, la figure ci-dessous où A, B, C, D et E sont des points tels que $EB = ED = p$ et $EC = EA = q$.

Soit $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}}\right)$; $\beta = \left(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}}\right)$ et $\gamma = \left(\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}}\right)$.

Figure



1) Faire une figure en prenant $p = 4cm$, $q = 5cm$, $\alpha = \beta = \gamma$.

2) Calculer l'aire S de la figure initiale en fonction de p, q, α, et β.

3) Montrer, en utilisant **A-3)** et **B-3)** que :

$$S \leq \frac{3pq\sqrt{3}}{4} \text{ et que } S < \frac{3pq\sqrt{3}}{4} \text{ si } \alpha \neq \beta.$$

4) Pour quelles valeurs de α, β, et γ l'aire S est-elle maximale ?

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Séries C et E

Année 2012
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte trois (3) pages.

Exercice 1 (4 points) *(Réservé aux candidats de la série C)*

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 3x + 4y = -15$.

1)
   a) Vérifier que $(-1, -3)$ est une solution de (E).
   b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite (Δ) dont une équation est $3x + 4y + 15 = 0$ et on désigne par A le point de (Δ) d'abscisse -1.
   a) Montrer que si M est un point de (Δ) à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.
   b) Soit N un point de (Δ) de coordonnées (x, y) vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x + 1|$.
   c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont entiers.

Exercice 2 (4 points) *(Réservé aux candidats de la série E)*

Dans le plan orienté, ABC est un triangle quelconque de sens direct.
I et J sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AB]$. R est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ A' et C' sont les images respectives des points A et C par la rotation R. S est la similitude directe qui transforme le point I en C' et le point J en A'.

On pose $h = R^{-1} o S$.

1)
   a) Déterminer les images respectives des points I et J par h.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

2)
   a) Montrer que (IJ) est perpendiculaire à $(A'C')$ et que $A'C' = 2IJ$
   b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S et construire son centre Ω.

Exercice 3 (4 points) *(Commun à tous les candidats)*

Une boutique vend 1000 sacs en cuir parmi lesquels certains présentent un léger défaut. Ces sacs sont fabriqués par trois maroquiniers de Kaya : Ali ; Boureima et Charles. Ali a livré 200 sacs dont 10 sont défectueux ; Boureima a livré 350 sacs dont 14 sont défectueux et Charles a livré le reste dont 2% sont défectueux. On choisit au hasard un sac parmi ces 1000 sacs et on considère les évènements suivants :
A :≪ Le sac choisi est fabriqué par Ali ≫
B :≪ Le sac choisi est fabriqué par Boureima ≫
C :≪ Le sac choisi est fabriqué par Charles ≫

D :≪ Le sac choisi est défectueux ≫

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) Déterminer $P(A)$; $P(B)$; $P(C)$; $P(D/A)$; $P(D/B)$ et $P(D/C)$.

2)

a) Prouver que $P(D \cap A) = \frac{1}{100}$

b) Calculer les probabilités suivantes :

$$P(D \cap B), P(D \cap C) \text{ et } P(D).$$

3) Sachant que le sac choisi n'est pas défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit fabriqué par Ali.

4) Le sac est vendu à 5000 F s'il est fabriqué par Ali, à 6000 F s'il est fabriqué par Boureima et à 8000 F s'il est fabriqué par Charles.

Une réduction de 30% est faîte sur le prix de chaque sac défecteux. On désigne par X la variable aléatoire égale au prix final d'un sac choisi au hasard.

a) Déterminer les valeurs prises par X

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

Problème (12 points) *(Commun à tous les candidats)*

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
θ est un nombre réel.

Partie A (5 points)

Pour tout réel θ, on définit l'application f_θ de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ vérifiant :

$$\begin{cases} x' = (\theta+1)x + (\theta-1)y \\ y' = (\theta+2)x + (\theta-2)y \end{cases}$$

1) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'application f_θ est bijective.

2) On suppose que l'application f_θ est bijective.

a) Déterminer l'application réciproque de f_θ, notée f_θ^{-1}, en donnant les coordonnées de M en fonction de celles de M'.

b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'application f_θ est involutive (c'est à dire $f_\theta \circ f_\theta = id_p$).

3) Déterminer, suivant les valeurs de θ, l'ensemble des points invariants par f_θ.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_θ pour $\theta = \frac{1}{2}$.

5) Dans cette question, on prend $\theta = 0$ et on s'intéresse à l'application f_0.

a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M' qui sont images par f_0 d'au moins un point M de P.

b) Un point M' de (Δ) étant donné, déterminer l'ensemble des points M de P tels que $f_0(M) = M'$.

c) Montrer que f_0 est la composée d'une projection et d'une homothétie, dont on précisera les éléments caractéristiques.

6) On pose $f_\theta^2 = f_\theta \circ f_\theta$ et, pour tout entier n supérieur à 2, $f_\theta^n = f_\theta \circ f_\theta^{n-1}$. Soit A_o le point de coordonnées $(1,1)$. On pose $A_1 = f_\theta(A_o)$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $A_n = f_\theta^n(A_o)$. On note (x_n, y_n) les coordonnées de A_n. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $x_n = y_n = P_n(\theta)$, où $P_n(\theta)$ est un polynôme en θ de degré n que l'on précisera.

Partie B (7 points)

Dans cette partie, on prend θ dans l'intervalle $]0,\pi[$. On considère la suite de points (M_n) de P définie de la manière suivante : $M_o = 0, M_1$ a pour affixe 1 et pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{cases} M_nM_{n+1} = (\sin\theta)\, M_{n-1}M_n) \\ \left(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\ ,\ \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) = \theta \end{cases}$$

On note z_n l'affixe de M_n pour tout entier naturel n.

1)

a) Vérifier que le nombre complexe $(\sin\theta)\, e^{i\theta}$ n'est pas un réel.

b) En déduire que $1 - \sin\theta\ e^{i\theta} \neq 0$.

2)

Soit n un entier naturel. On pose $a_n = z_{n+1} - z_n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = (\sin\theta)\ e^{i\theta}\ a_{n-1}$.

b) En déduire que : $a_n = (\sin^n\theta)\ e^{in\theta}$.

3)

a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n.

$$z_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $z_n = \dfrac{1}{1-\sin\theta e^{i\theta}} - \dfrac{(\sin^n\theta)\, e^{in\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$

c) Vérifier que la relation $z_n = \dfrac{1}{1-\sin\theta e^{i\theta}} - \dfrac{(\sin^n\theta)\, e^{in\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$ est valable pour $n = 0$.

4)

a) Montrer qu'il existe une unique similitude plane directe S telle que : $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $S(M_n) = M_{n+1}$.

NB : La partie A et la partie B du problème sont indépendantes l'une de l'autre.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Séries C et E

Année 2012
Session normale
Epreuve du $2^{\text{ème}}$ tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte trois (3) pages.

Exercice 1 (4 points)

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On désigne par U l'ensemble des nombres complexes de module 1 et par U^* l'ensemble des nombres complexes de module 1 privé du réel 1.

1) Soit u un élément de U^*; on pose $u = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in]0; 2\pi[$.

a) Déterminer le module et un argument de $1 - u$ en fonction de θ.

b) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{1}{1-u}$.

2) Montrer que :

a) L'ensemble des points M de P d'affixe $z = 1 - u$ où u décrit U, est le cercle de centre A d'affixe 1 et passant par O.

b) L'ensemble des points M de P d'affixe $z = \dfrac{1}{1-u}$ où u décrit U^* est la médiatrice (D) de $[OA]$.

3) Soit B le point d'affixe $b\,(b \neq 0)$, M le point d'affixe z. Interpréter le module de $z - b$ en terme de distance.

a) Quel est l'ensemble des points M d'affixe $z = b(1 - u)$, u décrivant U ?

b) Quel est l'ensemble des points M d'affixe $z = \dfrac{b}{1-u}$, u décrivant U^*?

Exercice 2 (4 points)

Une étude a révélé que, pour un jour donné, une machine peut être défectueuse à cause de deux dérèglements seulement, l'un électronique et l'autre mécanique. On suppose qu'un dérèglement ne peut se produire qu'une seule fois dans la journée.

La probabilité que la machine subisse un dérèglement électronique est égale à $\dfrac{3}{1000}$.
La probabilité que la machine subisse un dérèglement mécanique est égale au $\dfrac{7}{3}$ de celle d'un dérèglement électronique.

De plus, on sait que la probabilité que la machine subisse un dérèglement mécanique sachant qu'elle a subi un dérèglement électronique est égale à $\dfrac{1}{2}$.

On note E l'évènement ≪ la machine est déréglée électroniquement ≫ et M l'événement ≪ la machine est déréglée mécaniquement ≫. Ainsi, $\overline{E}$ (respectivement $\overline{M}$) est l'événement contraire de E (respectivement de M).

1) Définir chacun des événements suivants : $E \cap M$, $E \cup M$, $\overline{E} \cap \overline{M}$.

2)

a) Vérifier que la probabilité que la machine soit déréglée électroniquement et mécaniquement, est égale à $\dfrac{3}{2000}$.

Partie C

On pose $I = [-1; 0]$ et $J = f(I)$.

Soit h la restriction de f à I et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)

a) Montrer que h est bijective.

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.

Dresser le tableau de variation de h^{-1} puis construire sa courbe (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

2)

a) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x de J.

b) Calculer $\int_{-1}^{0} h^{-1}(x)\, dx$.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

a) Calculer $\mathcal{A}$.

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine plan compris entre les courbes $(\mathcal{C}')$ et (Γ).

Partie D

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} h^{-1}\left(\frac{1}{n+k} - 1\right), n \in \mathbb{N}^*$$

1)

a) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$

on a :

$$-1 \leq \frac{1-2n}{2n} \leq \frac{1}{n+k} - 1 \leq \frac{1-n}{n} \leq 0$$

b) En déduire que :

$$h^{-1}\left(\frac{1-2n}{2n}\right) \leq h^{-1}\left(\frac{1}{n+k} - 1\right) \leq h^{-1}\left(\frac{1-n}{n}\right)$$

2) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{n+1}{n} h^{-1}\left(\frac{1-2n}{2n}\right) \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} h^{-1}\left(\frac{1-n}{n}\right)$$

3) En déduire la limite de (u_n).

On donne : $\ln 2 \simeq 0,693$; $\ln 3 \simeq 1,099$; $\ln 5 \simeq 1,609$; $\ln 7 \simeq 1,946$; $\ln 13 \simeq 2,565$.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Séries C-E

Année 2013
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Cette épreuve comporte trois (3) pages.

Exercice 1 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^{x-1}}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.

1)

a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{cases} g_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \\ S_n(x) = 1 + 2x + \ldots + n\, x^{n-1} \end{cases}$$

a) Exprimer pour tout $x \neq 1$, $g_n(x)$ en fonction de n et x, sous forme d'une fonction rationnelle.

b) En déduire une expression de $S_n(x)$ en fonction de n et x.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

a) Donner une expression de u_n en fonction de n.

b) Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 (4 points)

On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$ tel que $f(z) = \left(\dfrac{1-i}{2}\right) z - 2 + 2i$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.

2) Donner la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

3) En posant $z = x + iy$ et $f(z) = X + iY$, montrer que

$$\begin{cases} x = X - Y + 4 \\ y = X + Y \end{cases}$$

4) On considère la courbe (C) d'équation $xy - 2x - 3y - 1 = 0$.

Montrer que l'image de (C) par f est la courbe (C') d'équation $\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(Y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = 7$

5) Quelle est la nature de (C').

Préciser l'excentricité e.

Problème (12 points)

Partie A

Soit la fonction numérique g définie et dérivable sur $]-1;1[$ par $g(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

1)

a) Calculer les limites de g en -1 et en 1.

b) Calculer $g'(x)$ et en déduire le sens de variations de g.

c) Montrer que g est une bijection de $]-1;1[$ vers $\mathbb{R}$.

2) On désigne par h la bijection réciproque de g.

a) Montrer que pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

b) Montrer que h est impaire.

3) Montrer que pour tous réels x et y on a : $h(x+y) = \dfrac{h(x)+h(y)}{1+h(x).h(y)}$.

Partie B

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété :

Pour tous réels x et y, $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}$ $\quad (I)$.

1) Montrer que s'il existe un réel c tel que $f(c) = 1$ ou $f(c) = -1$ alors la fonction f est constante.

On suppose dans toute la suite du problème que f est non constante.

2)

a) En écrivant $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, montrer que pour tout réel x, on a : $-1 < f(x) < 1$.

b) Etablir que $f(0) = 0$ et en déduire que f est impaire.

3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x, on a :

$$\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n.$$

4) On pose $\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)} = a$.

a) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$, la valeur $f(n)$ en fonction de a.

b) On pose $x = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $f(x)$ en fonction de a.

Partie C

La propriété (I) étant toujours satisfaite par f, on suppose de plus que f est dérivable en 0. On note α le nombre dérivé de f en 0. C'est à dire $\alpha = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$.

1) Montrer que f est dérivable en tout réel x et que $f'(x) = \alpha\left(1 - [f(x)]^2\right)$.

2) Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

3) On appelle f^{-1} la bijection réciproque de f et on admet que f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$.

a) Calculer la dérivée de fof^{-1} et en déduire que pour tout réel $y \in]-1,1[$,

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{\alpha(1-y^2)}$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

En déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1;1[$

c) En déduire f^{-1}, puis f.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Séries C-E

Année 2013
Session normale
Epreuve du $2^{ème}$ tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Cette épreuve comporte trois (3) pages.

Exercice 1 (4 points)

Lors d'un incendie survenu dans une pièce, des fumées toxiques dégagent du CO (monoxyde de carbone).

Une étude montre que le pourcentage $f(t)$ de CO présent dans la pièce à l'instant t (t exprimé en mn) vérifie l'équation différentielle

$$(E): \ f'(t) = a(100 - f(t))$$

où a est une constante réelle non nulle.

1) En posant $x(t) = 100 - f(t)$, écrire l'équation différentielle (F) d'inconnue $x(t)$.
2) Donner la solution générale de (F).
3) Déduire la solution générale de (E).
4) Sachant que $f(0) = 0,001$ et $f'(0) = 0,33333.10^{-2}$ exprimer $f(t)$ en fonction de t
5) Sachant que le seuil de haute toxicité du CO pour l'organisme est de 0,02%, calculer le temps au bout duquel ce seuil sera atteint

On donne :

$$\ln\left(\frac{99,98}{99,999}\right) \simeq -1,9.10^{-4}$$

Exercice 2 (4 points)

On dispose d'une urne contenant $(n+2)$ boules dont 2 vertes et n jaunes $(n \geq 3)$ indiscernables au toucher et d'une roue divisée en 3 secteurs inégaux numérotés 1 ; 2 et 3. La roue est telle que lorsqu'on la tourne les probabilités de s'arrêter sur les secteurs 1 ; 2 et 3 sont respectivement p_1, p_2 et p_3.

Les réels p_1, p_2 et p_3 forment dans cet ordre une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$

1) Calculer p_1, p_2 et p_3.
2) Un joueur mise 500 F et tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.
   S'il tire 2 boules de couleurs différentes il ne reçoit rien.
   S'il tire 2 boules jaunes il reçoit 500 F.
   S'il tire 2 boules vertes le joueur continue le jeu sans miser à nouveau.

On lui fait tourner la roue.
   S'il obtient le secteur 1 il ne reçoit rien,
   S'il obtient le secteur 2 il reçoit 500 F,
   S'il obtient le secteur 3 il reçoit 1000 F.

On désigne X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
   a) Quels sont les gains possibles du joueur.
   b) Déterminer en fonction de n, la loi de probabilité de X.

3) Dans cette question n prend la valeur 5.

a) Calculer $E(X)$.

b) Déterminer et construire la fonction de répartition F de X.

Problème (12 points)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

On désigne par (H_m) l'ensemble des points M du plan (P) dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $y^2 = mx^2 + 2(m+1)x + 2$ où m est un paramètre réel.

NB: Dans la représentation graphique et les figures, on prendra pour unité 2 cm.

A)

1) On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur

$$E = \left]-\infty; -2-\sqrt{2}\right] \cup \left[-2+\sqrt{2}; +\infty\right[$$

par : $y = f(x) = \sqrt{x^2+4x+2}$.

a) Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f. Montrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = -x-2$ et $y = x+2$ sont asymptotes à la courbe (C) de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f, puis dresser le tableau de variation de f.

c) Construire la courbe (C) de f dans (P).

d) Démontrer que la courbe (C) admet un axe de symétrie.

2)

a) Montrer que l'ensemble (H_1) est l'union de (C) et d'une courbe (C') dont on donnera une équation dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

b) Construire (H_1).

c) Montrer que (H_1) admet un centre de symétrie.

B)

1)

a) Quelle est la nature de l'ensemble (H_{-1}) ?

b) Construire (H_{-1}) dans (P).

2) On considère l'application S de (P) dans lui-même, qui à tout point M de coordonnées (x, y) et d'affixe z, associe le point M' de coordonnées (x', y') et d'affine z' définie par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{2}(-x+y+2). \end{cases}$$

a) Déterminer les coordonnées du point I invariant par S

b) Exprimer z' en fonction de z.

c) Donner la nature de S, puis déterminer ses éléments caractéristiques

d) Quelle est l'image par S de (H_{-1}) ?

e) Donner une équation de $\left(H_1'\right)$, transformé de (H_1) par S. Préciser la nature de $\left(H_1'\right)$.

C)

1)

a) Montrer que, quelque soit le réel m, l'ensemble (H_m) passe par deux points fixes A et B dont on donnera les coordonnées.

b) Ecrire les équations des tangentes à (H_m) aux points A et B.

2)

a) Construire (H_0).

b) Calculer l'aire de la portion du plan (P) limitée par l'ensemble (H_0) et l'axe des ordonnées

D)

1) Quel est l'ensemble (Q_1) des valeurs de m, pour lesquelles l'ensemble (H_m) est une ellipse ?

2) Exprimer alors en fonction du rèel m de (Q_1), la longueur des axes de l'ellipse (H_m) et préciser suivant les valeurs de m, le grand axe et le petit axe.

Fin

CORRIGES

Session Normale 2011 ; 1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

1.Calcul de probabilité

La probabilité qu'il ouvre le téléphone par hasard au premier essai est : $\frac{1}{A_{10}^{4}}$ = $\frac{1}{5040}$

2. Calcul de probabilité

La touche « 8 » étant défectueuse, la probabilité que le téléphone émette un signal sonore

est : $1-\frac{A_{9}^{4}}{A_{10}^{4}}$ = $1-\frac{3024}{5040}$ = $\frac{2}{5}$

3. Le clavier est réparé et la touche « 8 » fonctionne à nouveau.

a) Calcul de probabilité

La probabilité que le propriétaire ouvre le téléphone au premier essai sachant que le

code commence par un multiple non nul de 3 est : $\frac{1}{3A_{9}^{3}}$ = $\frac{1}{1512}$

b) Détermination de la loi de probabilité de X puis calcul de l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X .

L'ensemble des valeurs prises par X est : $\{0,1,2,3,4\}$, d'où la loi de probabilité de

X :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

$E(X)$ = $\frac{8}{5}$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$; or $E(X^2)=\frac{16}{5}$ et $[E(X)]^2=\frac{64}{25}$, donc $V(X)=\frac{16}{25}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$, donc $\sigma(X)=\frac{4}{5}$

Exercice 2

1. **a)** Démonstration du fait que la suite numérique (U_n) de terme général U_n est décroissante.

Soit n∈ N, $U_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1}{2}(z_n + |z_n|\right| = \frac{1}{2}\left|z_n + |z_n|\right|$

Or, $\left|z_n + |z_n|\right| \leq |z_n| + \left||z_n|\right|$ (inégalité triangulaire)

Comme $\left||z_n|\right| = |z_n|$, on obtient $\left|z_n + |z_n|\right| \leq 2|z_n|$ ou encore $\left|z_n + |z_n|\right| \leq 2U_n$

En multipliant chaque membre de l'inégalité $\left|z_n + |z_n|\right| \leq 2U_n$ par $\frac{1}{2}$, on obtient

$\frac{1}{2}\left|z_n + |z_n|\right| \leq U_n$. Or $\frac{1}{2}\left|z_n + |z_n|\right| = U_{n+1}$, donc on obtient finalement pour tout n∈ N $U_{n+1} \leq U_n$ et on en déduit que la suite numérique (U_n) de terme général U_n est décroissante sur N.

b) Déduction du fait que la suite (U_n) est convergente

Pour tout n∈ N, $U_n \geq 0$ grâce à la définition du module d'un nombre complexe. Donc la suite (U_n) est minorée par 0. De plus, la suite (U_n) est décroissante sur N d'après la question précédente. Par conséquent, la suite (U_n) est convergente car toute suite décroissante et minorée est convergente.

2. a) Démonstration de l'égalité : $e^{ix} + 1 = 2e^{i\frac{x}{2}} \times \cos\frac{x}{2}$, pour tout réel x .

Soit x un réel, on a : $e^{ix} + 1 = (e^{i\frac{x}{2}})^2 + 1 = e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})$, or $e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2}$; donc on a bien $e^{ix} + 1 = 2e^{i\frac{x}{2}} \times \cos\frac{x}{2}$.

b) Démonstration par récurrence de l'égalité: $z_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})} \times e^{i\frac{\theta}{2^n}}$, pour tout entier naturel n

Pour n entier naturel, notons P_n la propriété : $z_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})} \times e^{i\frac{\theta}{2^n}}$

P_0 s'écrit : $z_0 = re^{i\theta}$, ce qui est vrai

Supposons que P_n est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire $z_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin(\dfrac{\theta}{2^n})} \times e^{i\frac{\theta}{2^n}}$, et

démontrons qu'alors P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $z_{n+1} = \dfrac{r\sin\theta}{2^{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}} \times e^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}}$

Par définition de (z_n), $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|)$, or d'après l'hypothèse de récurrence,

$z_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin(\dfrac{\theta}{2^n})} \times e^{i\frac{\theta}{2^n}}$, donc $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin(\dfrac{\theta}{2^n})} e^{i\frac{\theta}{2^n}} + \left|\dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}} e^{i\frac{\theta}{2^n}}\right|\right)$

Comme $\left|e^{i\frac{\theta}{2^n}}\right| = 1$, alors $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}} e^{i\frac{\theta}{2^n}} + \dfrac{r|\sin\theta|}{2^n \left|\sin\dfrac{\theta}{2^n}\right|}\right)$

Or, $\theta \in]0,\pi[$, donc $\sin\theta > 0$. De plus, $0 < \theta < \pi$ entraîne $0 < \dfrac{\theta}{2^n} < \dfrac{\pi}{2^n} \leq \pi$ car $n \geq 0$;

donc $\dfrac{\theta}{2^n} \in]0,\pi[$ et par suite $\sin\dfrac{\theta}{2^n} > 0$,

d'où $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}} e^{i\frac{\theta}{2^n}} + \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \dfrac{r\sin\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2^n}} (e^{i\frac{\theta}{2^n}} + 1) = \dfrac{r\sin\theta}{2^{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^n}} (e^{i\frac{\theta}{2^n}} + 1)$.

Or d'après la question **2. a)**, $e^{i\frac{\theta}{2^n}} + 1 = 2\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}} e^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}}$, ce qui permet de noter que

$z_{n+1} = \dfrac{r\sin\theta}{2^{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^n}} \times 2\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}} e^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}}$.

En remarquant que $\sin\dfrac{\theta}{2^n} = \sin(2\dfrac{\theta}{2^{n+1}}) = 2\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$, alors $\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\theta}{2^n}} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}}$

Par suite, on a finalement : $z_{n+1} = \dfrac{r\sin\theta}{2^{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}} e^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}}$; ce qui permet de dire que P_{n+1} est aussi vraie.

En conclusion : P_0 est vraie ; en supposant P_n vraie, on aboutit à P_{n+1} vraie ; Donc, pour tout entier n∈N, P_n est vraie ; c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}\times e^{i\frac{\theta}{2^n}}$.

c) Déduction de la partie réelle $\text{Re}(z_n)$ et de la partie imaginaire $\text{Im}(z_n)$ de z_n.

Soit $n\in\mathbb{N}$; d'après la question **2. b)** on a : $z_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}\times e^{i\frac{\theta}{2^n}}$.

On a donc par déduction : $\text{Re}(z_n)=\dfrac{r\sin\theta\cos\frac{\theta}{2^n}}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$ et $\text{Im}(z_n)=\dfrac{r\sin\theta}{2^n}$.

3. Détermination de $\lim\limits_{n\to+\infty}\text{Im}(z_n)$

Pour tout n∈N, $\text{Im}(z_n)=\dfrac{r\sin\theta}{2^n}$; or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\text{Im}(z_n)=0$.

4. a) Démonstration de l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n\sin(\frac{\theta}{2^n}))=\theta$

Pour tout n∈N, $2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\times\theta$; or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\theta}{2^n}=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X}=1$; donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}=1$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\times\theta = 1\times\theta = \theta$.

On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n\sin(\frac{\theta}{2^n}))=\theta$

b) Déduction de $\lim\limits_{n\to+\infty}\text{Re}(z_n)$

Pour tout n∈N, $\text{Re}(z_n)=\dfrac{r\sin\theta\cos\frac{\theta}{2^n}}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\theta}{2^n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{\theta}{2^n}=1$; de plus, on a déjà d'après la question **4 a)** :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n\sin(\frac{\theta}{2^n}))=\theta$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\text{Re}(z_n)=\dfrac{r\sin\theta}{\theta}$.

5. Détermination de $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Pour tout n∈N, $z_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$; donc $U_n = |z_n| = \dfrac{r|\sin\theta|}{2^n \left|\sin\dfrac{\theta}{2^n}\right|}$.

Or, on a déjà vu à la question **2.b** que : $\sin\theta > 0$ et $\sin\dfrac{\theta}{2^n} > 0$, donc $U_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}}$.

D'après la question **4. a),** on a $\lim_{n\to+\infty} (2^n \sin(\dfrac{\theta}{2^n})) = \theta$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}} = \dfrac{r\sin\theta}{\theta}$.

On obtient alors : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{r\sin\theta}{\theta}$.

Problème

Partie A

1. Démonstration de l'existence d'un unique point invariant M_0 par f dont on précisera les coordonnées.

$M_0(x_0, y_0)$ est invariant par f si et seulement si $f(M_0) = M_0$; se traduisant par :

$\begin{cases} x_0 = x_0 - y_0 + 1 \\ y_0 = x_0 + y_0 \end{cases}$ d'où $M_0(0,1)$.

2. a) Expression de M_0M' en fonction de M_0M

$$M_0M = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$M_0M' = \sqrt{(x-y+1)^2 + (x+y-1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, d'où $M_0M' = \sqrt{2}\, M_0M$

b) Démonstration de l'indépendance de $\cos(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'})$ et $\sin(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'})$ de M.

$\cos(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) = \dfrac{\overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{M_0M'}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|\|\overrightarrow{M_0M'}\|}$; or $\|\overrightarrow{M_0M'}\| = \sqrt{2}\|\overrightarrow{M_0M}\|$

donc $\cos(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2y + 1}{\sqrt{2}(x^2+y^2-2y+1)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'})}{\|\overrightarrow{M_0M}\|\|\overrightarrow{M_0M'}\|} = \dfrac{\begin{vmatrix} x & x-y+1 \\ y-1 & x+y-1 \end{vmatrix}}{\sqrt{2}\|\overrightarrow{M_0M}\|^2}$

$\sin(\widehat{\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}}) = \dfrac{x(x+y-1)-(y-1)(x-y+1)}{\sqrt{2}(x^2+y^2-2y+1)} = \dfrac{x^2+y^2-2y+1}{\sqrt{2}(x^2+y^2-2y+1)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\begin{cases} \cos(\widehat{\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\widehat{\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ alors $(\widehat{\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}})$ est un angle constant dont la mesure principale

est égale à $\dfrac{\pi}{4}$ radians.

3. Détermination des valeurs de k et de θ.

Pour tous M, $N\ de\ P$, $M'N' = k\ MN$ et $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}}) = \theta\ (2\pi)$.

En particulier pour $N = M_0$, $f(M_0) = M_0$,et on a :

$M_0M' = k\ M_0M$ et $(\widehat{\overrightarrow{MM_0},\overrightarrow{M'M_0}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}}) = \theta\ (2\pi)$

D'après **2.a)** , $k = \sqrt{2}$ et d'après **2. b)** , $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

4. a) Démonstration du fait que $f = h \circ r$ où h est l'homothétie de centre M_0 et de rapport k et r la rotation de centre M_0 et d'angle de mesure θ.

Soit $M \in P$ tel que $r(M) = M'\ et\ h(M') = M''$, ce qui revient à ($h \circ r$)(M) = M''.

$r(M) = M'$ donc $M_0M = M_0M'$ et $(\widehat{\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}}) = \theta$

$h(M') = M''$ donc $\overrightarrow{M_0M''} = k\overrightarrow{M_0M'}$

Par suite $\begin{cases} M_0M'' = |k|M_0M' = |k|M_0M = kM_0M\ \ car\ k>0 \\ (\widehat{\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M''}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_0M},k\overrightarrow{M_0M'}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}}) = \theta\ \ car\ k>0 \end{cases}$ d'où ($h \circ r$)(M) = $f(M)$

La composée $h \circ r$ étant bijective, $f = h \circ r$.

b) Déduction de la nature de l'application f et précision de ses éléments caractéristiques.

$f = h \circ r$ donc f est une similitude plane directe dont les éléments caractéristiques sont : centre $M_0(0,1)$; rapport $k = \sqrt{2}$; angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

5. Détermination de l'expression de Z en fonction de z et déduction des résultats de la question

4. b).

$Z = X + iY = (x-y+1) + i(x+y) = (1+i)z + 1$

$Z = az + b$ avec $a = 1+i\ et\ b = 1$; f est une similitude plane directe de centre M_0 d'affixe

$z_0 = \frac{b}{1-a} = i$, de rapport $k = |a| = \sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\theta = \arg a = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$

6. a) Démonstration du fait que (Γ) est l'ensemble des points $M(X,Y)$ *de* P tels que

$Y^4 = 9(X^2-1)^2$.

$\begin{cases} X = x-y+1 \\ Y = x+y \end{cases}$ donne : $x+y = Y;\ x-y = X-1;\ x = \frac{1}{2}(X+Y-1);\ y = \frac{1}{2}(-X+Y+1)$;

$xy = \frac{1}{4}(-X^2+Y^2+2X-1);\ x^2+y^2 = \frac{1}{2}(X^2+Y^2-2X+1)$;

$-72xy(x^2+y^2) = 9(X^4-Y^4-4X^3+6X^2-4X+1)$;

$36[(x-y)^3+(x-y)^2] = 36X^3-72X^2+36X$

f est bijective

$8(x+y)^4+36(x-y)^3+36(x-y)^2-72xy(x^2+y^2) = 0$ équivaut à $Y^4 = 9(X^2-1)^2$

$M(x,y) \in (C)$ équivaut à $M'(X,Y) \in (\Gamma) : Y^4 = 9(X^2-1)^2$.

b) Déduction du fait que (Γ) est la réunion de deux coniques (Γ_1) *et* (Γ_2) dont on précisera les équations.

$Y^4 = 9(X^2-1)^2$ équivaut à $Y^2 = 3(X^2-1)$ *ou* $Y^2 = -3(X^2-1)$

$(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$ avec : $(\Gamma_1) : X^2 + \frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ et $(\Gamma_2) : X^2 - \frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

(Γ_1) est une ellipse et (Γ_2) est une hyperbole.

c) Construction de (Γ)

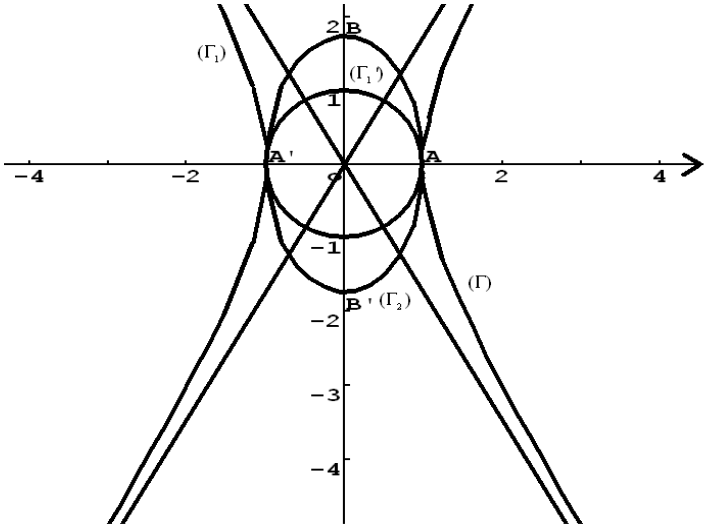
$(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$

(Γ_1) est une ellipse de centre $O(0,0)$ et de sommets les points de coordonnées

$(0,\sqrt{3});\ (0,-\sqrt{3});\ (1,0);\ (-1,0)$

(Γ_2) est une hyperbole de centre $O(0,0)$; de sommets les points de coordonnées

$(1,0)$ *et* $(-1,0)$; d'asymptotes les droites d'équations $Y = \sqrt{3}X$; $Y = -\sqrt{3}X$.



d) Calcul en cm^3 du volume V engendré par la rotation de (Γ_1) autour de l'axe des abscisses.

$$V = 8\pi\int_{-1}^{1}(3-3X^2)\,dX = 24\pi[X-\frac{1}{3}X^3]_{-1}^{1} = 32\pi$$

$$V = 32\pi\ cm^3$$

Partie B

1. Démonstration du fait que g est une application bijective

$\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{3}y \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=x' \\ y=\sqrt{3}y' \end{cases}$

Sachant (x',y'), alors (x,y) est unique. Par conséquent, g est une application bijective car

g est une application dont la réciproque est également une application.

2. Démonstration du fait que (Γ'_1) est le cercle de centre O et de rayon 1.

$$(\Gamma_1): x^2+\frac{y^2}{3}=1$$

$(\Gamma'_1): x'^2+\frac{(\sqrt{3}y')^2}{3}=1$ équivaut à $(\Gamma'_1): x'^2+y'^2=1$; par suite, (Γ'_1) est bien le cercle de centre O et de rayon 1.

3. Construction de (Γ'_1) dans le même repère que (Γ) (voir figure)

4 . a) Etude de la position du point de coordonnées $(1,0)$ par rapport à P_α

En remplaçant x *et* y respectivement par 1 et 0 dans $(\cos\alpha)y-(\sin\alpha)x$, on obtient $-\sin\alpha$.

Comme $\alpha\in[0,\pi]$, $-\sin\alpha\leq 0$, donc le point de coordonnées $(1,0)$ appartient à P_α

b) Détermination des coordonnées des points d'intersection de (Γ'_1) avec la droite d'équation $(\cos\alpha)y-(\sin\alpha)x=0$

La résolution du système d'équations $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (\cos\alpha)y-(\sin\alpha)x=0 \end{cases}$ donne $(x=\cos\alpha \text{ et } y=\sin\alpha)$ ou $(x=-\cos\alpha \text{ et } y=-\sin\alpha)$.

Par conséquent, les points d'intersection de (Γ'_1) avec la droite d'équation $(\cos\alpha)y-(\sin\alpha)x=0$ ont pour coordonnées $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ *et* $(-\cos\alpha,-\sin\alpha)$.

5. Démonstration de $A(\alpha)=A(\frac{\pi}{2})+\sin 2\alpha-4\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$, pour tout $\alpha\in[0,\pi]$.

1er cas : $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$A(\alpha)=A(\frac{\pi}{2})-4\int_0^{\cos\alpha}(\sqrt{1-x^2}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x)\,dx \;=\; A(\frac{\pi}{2})+2\cos\alpha\sin\alpha-4\int_0^{\cos\alpha}(\sqrt{1-x^2})\,dx$$

or $\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha$, donc $A(\alpha)=A(\frac{\pi}{2})+\sin 2\alpha-4\int_0^{\cos\alpha}(\sqrt{1-x^2})\,dx$

2ème cas : $\alpha=\frac{\pi}{2}$

$A(\alpha)=A(\frac{\pi}{2})$; mais comme $\sin 2\alpha=\sin\pi=0$ et $\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{2}=0$ pour donner

$\int_0^{\cos\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=0$; alors $A(\frac{\pi}{2})=A(\frac{\pi}{2})+\sin 2\times\frac{\pi}{2}-4\int_0^{\cos\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

3ème cas : $\alpha\in]\frac{\pi}{2},\pi]$

$$A(\alpha)=A(\frac{\pi}{2})+4\int_{\cos\alpha}^{0}(\sqrt{1-x^2}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x)\,dx=A(\frac{\pi}{2})+\sin 2\alpha-4\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

6. Démonstration du fait que la fonction $\alpha \mapsto A(\alpha)$ est dérivable sur $[0,\pi]$ puis détermination

de $A'(\alpha)$ pour en déduire $A(\alpha)$.

Pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, $A(\alpha) = A(\frac{\pi}{2}) + \sin 2\alpha - 4\int_0^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\, dx$

La fonction : $\alpha \mapsto \sin 2\alpha$ est dérivable sur $[0,\pi]$. De même, la fonction

$\alpha \mapsto \int_0^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\, dx$ est dérivable sur $[0,\pi]$ car c'est la composée de deux fonctions

dérivables sur $[0,\pi]$ ($u \circ v$ avec $v(\alpha) = \cos\alpha$ et $u(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sqrt{1-x^2}\, dx$). Par conséquent, A

est dérivable sur $[0,\pi]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,\pi]$.

Pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, $A'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - 4\sqrt{1-\cos^2\alpha} \times (-\sin\alpha) = 2\cos 2\alpha + 4\sin^2\alpha$, ce qui donne $A'(\alpha) = 2(1-2\sin^2\alpha) + 4\sin^2\alpha = 2$.

Pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, $A'(\alpha) = 2$

Comme pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, $A'(\alpha) = 2$, alors pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, $A(\alpha) = 2\alpha \ cm^2$.

Session Normale 2011 ; 2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout x∈ IR⁺, $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$

1. a) Etude du sens de variation de P_n.

La fonction $P_n : x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$ est une fonction polynomiale définie sur IR⁺, donc

dérivable sur IR⁺. Pour tout x∈ IR⁺, $P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\ x^{k-1}$ et $P_n'(x) > 0$; donc P_n est

strictement croissante sur IR⁺.

$P_n(0) = -1 \ et \ P_n(1) = n-1$

b) Déduction de l'existence et de l'unicité d'une racine α_n de P_n dans]0,1[.

P_n est continue et strictement croissante sur [0,1] ; de plus, $P_n(0) \times P_n(1) < 0$ car $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = n-1$ avec $n-1 > 0$ pour $n \geq 2$. On en déduit que P_n admet une racine unique α_n appartenant à]0,1[.

$P_2(x) = x^2 + x - 1$; par suite, on obtient $\alpha_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2. a) Démonstration de $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$ pour tout $n \geq 2$.

$P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ équivaut à $-1 + \sum_{k=1}^{n+1} {\alpha_{n+1}}^k = 0$; ce qui donne $-1 + {\alpha_{n+1}}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} {\alpha_{n+1}}^k = 0$ ou encore ${\alpha_{n+1}}^{n+1} + P_n(\alpha_{n+1}) = 0$. On obtient alors $P_n(\alpha_{n+1}) = -{\alpha_{n+1}}^{n+1}$ avec ${\alpha_{n+1}}^{n+1} \in]0,1[$ car $\alpha_{n+1} \in]0,1[$; d'où $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$.

b) Déduction du sens de variation de la suite (α_n) et étude de sa convergence.

On a $P_n(\alpha_{n+1}) < P_n(\alpha_n)$ car $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$ et $P_n(\alpha_n) = 0$. De plus, P_n est une bijection strictement croissante sur IR⁺. Par conséquent, $P_n(\alpha_{n+1}) < P_n(\alpha_n)$ entraîne $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

Comme pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, la suite (α_n) est strictement décroissante sur N- {0 ;1}.

La suite α_n est minorée par 0 au regard de l'appartenance de α_n à]0,1[.

La suite (α_n) est convergente car elle est décroissante et minorée.

3. a) Démonstration de $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$ et déduction de

$\alpha_n^{\ n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Pour tout $x \neq 1$, $P_n(x) = -1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = -1 + \dfrac{x(1-x^n)}{1-x} = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x-1}$.

Comme $\alpha_n \in]0,1[$, alors $\alpha_n \neq 1$; et $P_n(\alpha_n) = 0$ équivaut à $\dfrac{\alpha_n^{\ n+1} - 2\alpha_n + 1}{\alpha_n - 1} = 0$, ce qui

donne $\alpha_n^{\ n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$.

b) Justification de $\alpha_n \leq \alpha_2 < 1 \ et \ 0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{\ n+1}$ pour $n \geq 2$.

Comme la suite (α_n) est strictement décroissante sur N- {0 ;1}, alors pour tout $n \geq 2$,

$\alpha_n \leq \alpha_2$. De plus, $\alpha_2 \in]0,1[$, donc pour tout $n \geq 2$, $\alpha_n \leq \alpha_2 < 1$.

On a $0 < \alpha_n \leq \alpha_2$, ce qui entraîne $\alpha_n^{\ n+1} \leq \alpha_2^{\ n+1}$. Or d'après **3. a)** , $\alpha_n^{\ n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$; ce

qui donne $\alpha_n^{\ n+1} = 2\alpha_n - 1$ avec $\alpha_n^{\ n+1} > 0$ car $\alpha_n \in]0,1[$. Par conséquent, on a bien

$0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{\ n+1}$.

c) Déduction de $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

On a : $0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{\ n+1}$ pour tout entier $n \geq 2$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_2^{\ n+1} = 0$ car $\alpha_2 \in]0,1[$. Par passage à la limite, on obtient d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} (2\alpha_n - 1) = 0$;

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

1. a) Détermination des coordonnées de G et de H.

Soit $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre des points pondérés $(A,-1)$ et $(B,2)$

$$x_G = \frac{(-1)\times 1 + 2\times 2}{-1+2} = 3;\ y_G = \frac{(-1)\times(-2) + 2\times 0}{-1+2} = 2;\ z_G = \frac{(-1)\times 3 + 2\times(-3)}{-1+2} = -9$$

Ainsi, on obtient : $G(3,2,-9)$.

Soit $H(x_H, y_H, z_H)$ le barycentre des points pondérés $(C,3)$ *et* $(D,2)$

$$x_H = \frac{3\times(-1)+2\times3}{3+2} = \frac{3}{5};\ y_H = \frac{3\times1+2\times1}{3+2} = 1;\ z_H = \frac{3\times0+2\times(-2)}{3+2} = \frac{-4}{5}$$

Ainsi, on obtient : $H(\frac{3}{5},1,\frac{-4}{5})$

b) Détermination de (Δ).

$-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB} = (-1+2)\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD} = (3+2)\overrightarrow{MH} = 5\overrightarrow{MH}$

$(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})\Lambda(3\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}) = \vec{O}$ équivaut à $5\ (\overrightarrow{MG}\ \Lambda\ \overrightarrow{MH}) = \vec{O}$; ce qui donne

$(\overrightarrow{MG}\ \Lambda\ \overrightarrow{MH}) = \vec{O}$. Or $\overrightarrow{MG}\ \Lambda\ \overrightarrow{MH} = \vec{O}$ équivaut à $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont colinéaires.

$(\Delta) = (GH)$: c'est la droite passant par les points G *et* H.

c) Position de N par rapport à (Δ).

On a : $\overrightarrow{NG} = 3\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}$; $\overrightarrow{NH} = \frac{3}{5}\vec{i}+\vec{j}+\frac{1}{5}\vec{k}$; $\overrightarrow{NG}\ \Lambda\ \overrightarrow{NH} = \frac{42}{5}\vec{i}-\frac{27}{5}\vec{j}+\frac{9}{5}\vec{k}$

Comme $\overrightarrow{NG}\ \Lambda\ \overrightarrow{NH} \neq \vec{O}$, alors N n'appartient pas à (Δ).

2. a) Détermination d'une équation cartésienne du plan P.

Le vecteur $\overrightarrow{NG}\ \Lambda\ \overrightarrow{NH}$ est un vecteur normal au plan P.

Alors P : $\frac{42}{5}x-\frac{27}{5}y+\frac{9}{5}z+k=0$.

$G\in P$ donne $k=\frac{9}{5}$.

Ainsi P : $14x-9y+3z+3=0$.

b) Etude de la position relative du plan P et de la sphère S.

La distance du centre C de S à P est : $\frac{|14\times(-1)-9\times1+3\times0+3|}{\sqrt{14^2+(-9)^2+3^2}} = \frac{20}{\sqrt{286}} = \frac{10\sqrt{286}}{143}$.

Comme cette distance est égale au rayon de S, alors P est tangent à S.

Problème

Partie A

f concave sur I si pour tout $(x,y)\in I^2$, $f(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

1. a) Détermination du signe de $\dfrac{e^a+e^b}{2}-e^{\frac{a+b}{2}}$

Pour tous réels $a\ et\ b$, $\dfrac{e^a+e^b}{2}-e^{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{e^a+e^b-2e^{\frac{a+b}{2}}}{2}=\dfrac{(e^{\frac{a}{2}}-e^{\frac{b}{2}})^2}{2}$; d'où

$\dfrac{e^a+e^b}{2}-e^{\frac{a+b}{2}}\geq 0$

$\dfrac{e^a+e^b}{2}-e^{\frac{a+b}{2}}\geq 0$ équivaut à $\dfrac{e^a+e^b}{2}\geq e^{\frac{a+b}{2}}$, donc la fonction $x\mapsto e^x$ n'est pas concave sur $\mathbb{R}$.

b) Démonstration du fait que la fonction $\ln$ est strictement concave sur]0,+ ∞[

Soit $(x,y)\in$]0,+ ∞[×]0,+ ∞[; posons $a=\ln x\ et\ b=\ln y$, ce qui équivaut à $x=e^a\ et\ y=e^b$.

$\ln(\dfrac{x+y}{2})=\ln(\dfrac{e^a+e^b}{2})$ et $\dfrac{\ln x+\ln y}{2}=\dfrac{a+b}{2}=\ln e^{\frac{a+b}{2}}$. Comme $\dfrac{e^a+e^b}{2}\geq e^{\frac{a+b}{2}}$ et la fonction ln est croissante sur]0,+ ∞[, alors $\ln(\dfrac{e^a+e^b}{2})\geq \ln e^{\frac{a+b}{2}}$, ce qui revient à dire que $\ln(\dfrac{x+y}{2})\geq\dfrac{\ln x+\ln y}{2}$; la fonction ln est donc concave sur]0,+ ∞[. De plus, si $x\neq y$, l'inégalité devient stricte car ln est strictement croissante sur]0,+ ∞[. Par conséquent, la fonction ln est strictement concave sur]0,+ ∞[.

2. Etude de la concavité de la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ sur IR⁺.

Soit $(x,y)\in$ IR⁺× IR⁺, on a : $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4}=\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{4}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{4}$

Pour $x\neq y$, on a $\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{4}>0$ et cela équivaut à $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4}>0$ ou encore à $\dfrac{x+y}{2}>\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4}$, d'où $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}>\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$ car $\dfrac{x+y}{2}=(\sqrt{\dfrac{x+y}{2}})^2$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est donc strictement concave sur $\mathbb{R}^+$.

3. Démonstration du fait que h est strictement concave sur [0,π].

Soit $(x,y)\in$ [0,π] × [0,π] tels que $x\neq y$

$$\frac{h(x)+h(y)}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{2}=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=h(\frac{x+y}{2})\cos\frac{x-y}{2}$$

Comme $(x,y)\in$ [0,π] × [0,π], alors $-\frac{\pi}{2}\leq\frac{x-y}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ et donc $0\leq\cos\frac{x-y}{2}<1$; par suite,

$\frac{h(x)+h(y)}{2}<h(\frac{x+y}{2})$ car $x\neq y$. h est donc strictement concave sur [0,π].

Partie B

1. Démonstration du fait que g est dérivable sur IRet calcul de sa dérivée g'

La fonction $x\mapsto f(\frac{x+a}{2})$ est dérivable sur IR par composition. La fonction g est

dérivable sur comme somme de fonctions dérivables sur IR et pour tout réel x, on a :

$$g'(x)=\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}f'(\frac{x+a}{2})=\frac{1}{2}[f'(x)-f'(\frac{x+a}{2})]$$

2. a) Démonstrations de $g'(x)<0\ si\ x>a\ et\ g'(x)>a\ si\ x<a$

(i) Si $x>a,\ 2x>a+x,\ x>\frac{a+x}{2}$, d'où $f'(x)<f'(\frac{x+a}{2})$ car f' strictement

décroissante ; par suite, on obtient $\frac{1}{2}[f'(x)-f'(\frac{x+a}{2})]<0$, c'est-à-dire $g'(x)<0$

(ii) Si $x<a,\ x<\frac{a+x}{2}$, d'où $f'(x)>f'(\frac{a+x}{2})$ car f' strictement décroissante ; par suite,

on obtient $\frac{1}{2}[f'(x)-f'(\frac{x+a}{2})]>0$, c'est-à-dire $g'(x)>0$

b) Déduction de $g(x)\leq 0$ pour tout réel x et que f est concave sur

L'étude du signe de g' permet de dire que la fonction g est strictement croissante sur

]-∞, a] et strictement décroissante sur [a ,+∞[; g admet de ce fait un maximum absolu

en a, de valeur $g(a)=0$. Par conséquent, pour tout réel x, $g(x)\leq 0$.

Or, $g(x)\leq 0$ équivaut à $f(\frac{x+a}{2}\geq\frac{f(x)+f(a)}{2}$; donc f est concave sur IR.

3. a) Etude des variations de φ sur [0,π].

φ est continue et dérivable sur [0,π] et pour tout $x\in[0,\pi]$,

$$\varphi'(x)=\cos x+\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{4}.$$

Comme $0 \leq x \leq \pi$, alors $0 \leq \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos\frac{x}{4} > 0$; par suite, φ' est du signe de $\cos\frac{3x}{4}$.

$\varphi'(x) = 0$ pour $x = \frac{2\pi}{3}$

Pour $0 \leq x < \frac{2\pi}{3}$, $\varphi'(x) > 0$, donc φ est strictement croissante sur $[0, \frac{2\pi}{3}]$

Pour $\frac{2\pi}{3} < x \leq \pi$, $\varphi'(x) < 0$, donc φ est strictement décroissante sur $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$

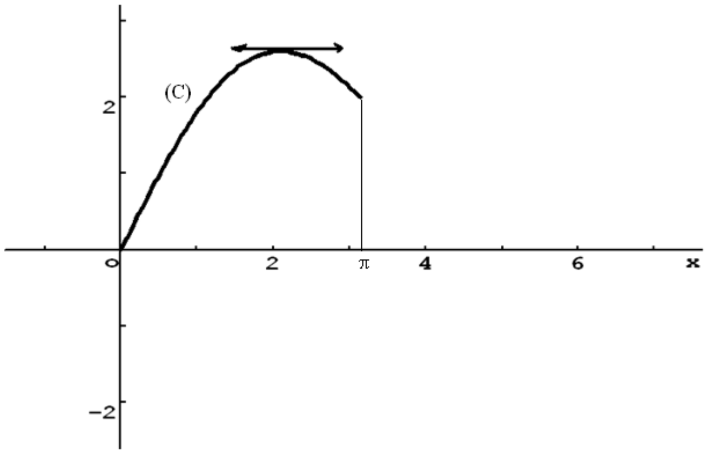
Tableau de variations de φ sur [0,π].

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\varphi'(x)$		+	0	-	
$\varphi(x)$			$\frac{3\sqrt{3}}{2}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				2

b) Déduction de $\varphi(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ pour tout $x \in [0, \pi]$

φ croît sur $[0, \frac{2\pi}{3}]$ et décroît sur $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$; il en résulte un maximum absolu en $\frac{2\pi}{3}$, de valeur $\varphi(\frac{2\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Par suite, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

c) Construction de la courbe (C) de φ



d) Calcul de V en cm^3

$$V = 8\pi\int_0^{\pi}(\varphi(x))^2dx = 8\pi\int_0^{\pi}(\sin x + 2\sin\frac{x}{2})^2dx = 8\pi\int_0^{\pi}(\sin^2 x + 4\sin x\sin\frac{x}{2} + 4\sin^2\frac{x}{2})dx$$

Or, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $4\sin x\sin\frac{x}{2} = 2(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2})$; $4\sin^2\frac{x}{2} = 2(1-\cos x)$; donc

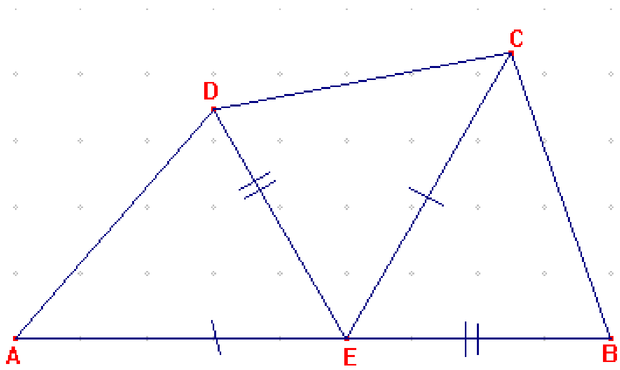
$$V = 8\pi\int_0^{\pi}[\frac{1}{2}(1-\cos 2x) + 2(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}) + 2(1-\cos x)]dx$$

$$V = 8\pi[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + 4\sin\frac{x}{2} - \frac{4}{3}\sin\frac{3x}{2} + 2x - 2\sin x]_0^{\pi}$$

$$V = (20\pi^2 + \frac{128}{3}\pi)\ cm^3$$

Partie C

1. Figure



2. Calcul de S en fonction de $p,\ q,\ \alpha\ et\ \beta$

$$S = aire(ADE) + aire(ECD) + aire(EBC)$$

$S=\frac{1}{2}pq(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$; or $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ donne $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ et donc

$\sin\gamma=\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$. Par conséquent, $S=\frac{1}{2}pq[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)]$.

3. Démonstrations de $S\leq\frac{3pq\sqrt{3}}{4}$ et $S<\frac{3pq\sqrt{3}}{4}$ si $\alpha\neq\beta$

$S=\frac{1}{2}pq[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)]=\frac{1}{2}pq[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)]$.

Or, $-\frac{\pi}{2}\leq\frac{\alpha-\beta}{2}\leq\frac{\pi}{2}$, donc $0\leq\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leq 1$ .Par suite, $S\leq\frac{1}{2}pq[2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)]$

et $\frac{1}{2}pq[2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)]=\frac{1}{2}pq\ \varphi(\alpha+\beta)$ donne $S\leq\frac{1}{2}pq\ \varphi(\alpha+\beta)$.

Comme pour tout $x\in[0,\pi]$, $\varphi(x)\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que $S\leq\frac{3pq\sqrt{3}}{4}$.

Si $\alpha\neq\beta$, alors $0\leq\cos\frac{\alpha-\beta}{2}<1$ et dans ce cas, on aboutit à $S<\frac{3pq\sqrt{3}}{4}$.

4. Recherche des valeurs de $\alpha,\ \beta\ et\ \gamma$ pour lesquelles S est maximale.

S est maximale si $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}pq$; or cela n'est possible que lorsque $\varphi(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, ce qui nécessite d'une part que $\alpha=\beta$ pour réaliser $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1$ et d'autre part que $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.

On en déduit que $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{3}$ et finalement $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

S est maximale lorsque $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Session Normale 2012 ; 1^er^ tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

1. a) Vérification
   $3(-1) + 4(-3) = -15$, donc $(-1 ; -3)$ est une solution de (E)
   b) Résolution de (E)

(E) $\Leftrightarrow$ $3(x+1) + 4(y+3)=0$

$\Leftrightarrow$ $3(x+1) = -4(y+3)$; 3 divise $4(y+3)$ et 3 st premier avec 4 ; d'après le théorème de Gauss, 3 divise $y+3$. Il existe donc un entier relatif k tel que : $y+3 = 3k$;
alors $y = 3k-3$ et $x = -4k-1$.
$S = \{(-4k-1 ; 3k-3),\ k \in \mathbb{Z}\}$

2. a) Démonstration du fait que AM est multiple de 5
   Comme M appartient à (Δ) et est à coordonnées entières, alors il existe k tel que : $x_M = -4k-1$ et $y_M = 3k -3$; on a : $AM^2 = (x_M+1)^2 + (y_M+3)^2$; ce qui donne $AM^2= 25k^2$ d'où $AM = 5|k|$; donc AM est un multiple de 5.
   b) Vérification
   $AN = \frac{5}{4}|x+1|$
   $AN^2 = (x+1)^2 + (y+3)^2$; soit $AN^2 = (x+1)^2 + (\frac{-15-3x}{4}+3)^2$; et $AN^2 = \frac{25}{16}(x+1)^2$; donc $AN = \frac{5}{4}|x+1|$.
   c) Déduction
   D'après 2.b) $|x+1| = \frac{4}{5}AN$. Donc si $AN = 5k$, alors $|x+1|= 4k$.
   Alors $x+1$ est un entier et x est un entier.
   On a $y+3 = -\frac{3}{4}(x+1)$ et $x+1 = 4p$, $p \in \mathbb{Z}$; alors $y+ 3 =-3p$; y est aussi un entier.
   Par suite, si AN est multiple de 5, alors x et y sont des entiers.

Exercice 2

1. a) Détermination des images de I et J par h
   Images de I et J par h.
   $*h(I) = R^{-1}oS(I) = R^{-1}(C') = C$. $*h(J) = R^{-1}oS(J) = R^{-1}(A') = A$.
   $h(I) = C$ et $h(J) = A$.
   b) Déduction de la nature de h et éléments caractéristiques de h
   R^{-1} et S étant des similitudes planes directes, on a : $R^{-1}oS = h$ qui est aussi une

similitude plane directe. Son angle est $(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{CA})$ et son rapport $\frac{CA}{IJ}$.

Comme I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AB], alors $(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{CA})$=0 et CA = 2IJ.

Conclusion : h est l'homothétie de centre B et de rapport 2.

2. a) Démonstration

(IJ) $\perp$ (A'C') et A'C' =2 IJ

$\begin{cases} R(A)=A' \\ R(C)=C' \end{cases} \Rightarrow (AC) \perp (A'C')$ et comme (AC)//(IJ), donc (IJ) $\perp$ (A'C') ;

on a : AC=A'C' et AC = 2IJ.

b) Détermination de l'angle, du rapport de S et construction de son centre

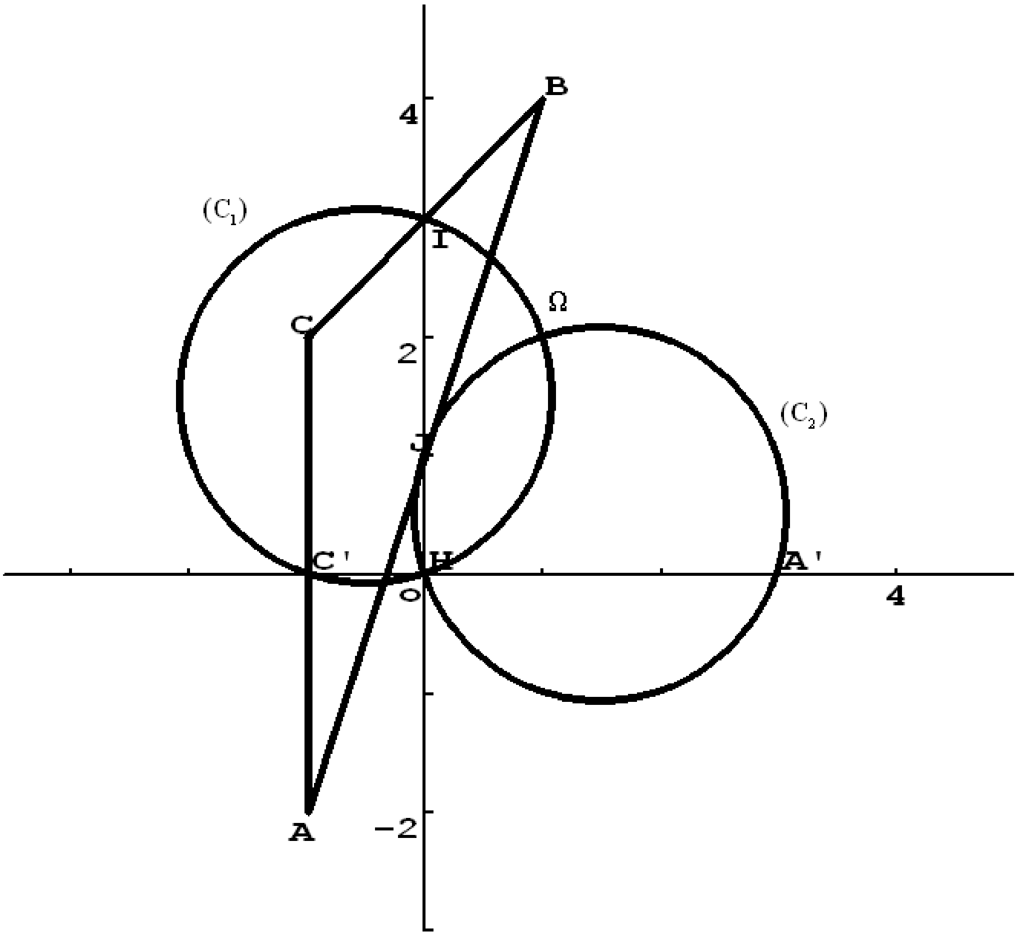
h= R^{-1}oS, donc S =Roh ; R est une similitude plane directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 1.

h est une similitude plane directe d'angle 0 et de rapport 2.

Alors la composée S =Roh est d'angle $\frac{\pi}{2}$+0 = $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2$\times$1=2.

Construction de Ω.

Soit H le point d'intersection des droites (IJ) et (A'C'). Soient (C_1) et (C_2) les cercles circonscrits respectivement aux triangles HIC' et HJA'. Ω est alors le deuxième point d'intersection des cercles (C_1) et (C_2).



Exercice 3

1. Détermination de probabilités

$P(A)=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$; $P(B)=\frac{350}{1000}=\frac{7}{20}$; $P(C)=\frac{450}{1000}=\frac{9}{20}$;

$P(D/A)=\frac{10}{200}=\frac{1}{20}$; $P(D/B)=\frac{14}{350}=\frac{1}{25}$; $P(D/C)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$.

2.a) Calcul de $P(D\cap A)$

$P(D\cap A)=P(A)\times P(D/A)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{100}$.

b) Calcul de $P(D\cap B)$, $P(D\cap C)$ et $P(D)$

* $P(D\cap B)=P(B)\times P(D/B)=\frac{7}{20}\times\frac{1}{25}=\frac{7}{500}$.

* $P(D\cap C)=P(C)\times P(D/C)=\frac{9}{20}\times\frac{1}{50}=\frac{9}{1000}$.

* $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$; $P(D)=\frac{10}{1000}+\frac{14}{1000}+\frac{9}{1000}=\frac{33}{1000}$

3. Calcul de $P(A/\overline{D})$.

$$P(A/\overline{D})=\frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{19}{20}}{\frac{967}{1000}}=\frac{190}{967}.$$

4. a) Valeurs prises par X

$X(\Omega)=\{3500 ; 4200 ; 5000 ; 5600 ; 6000 ; 8000\}$

b) Loi de probabilité de X

$P(X=3500)=P(D\cap A)=\frac{1}{100}$; $P(X=4200)=P(D\cap B)=\frac{7}{500}$;

$P(X=5000)=P(\overline{D}\cap A)=\frac{19}{100}$; $P(X=5600)=P(D\cap C)=\frac{9}{1000}$;

$P(X=6000)=P(\overline{D}\cap B)=\frac{42}{125}$; $P(X=8000)=P(\overline{D}\cap C)=\frac{441}{1000}$.

x_i	3500	4200	5000	5600	6000	8000	Total
p_i	$\frac{10}{1000}$	$\frac{14}{1000}$	$\frac{190}{1000}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{336}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	1

Problème

Partie A

1. Valeurs de θ pour lesquelles f_θ est bijective.

f_θ est bijective si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix}\theta+1 & \theta-1\\ \theta+2 & \theta-2\end{vmatrix}$ est différent de zéro.

Or $\begin{vmatrix}\theta+1 & \theta-1\\ \theta+2 & \theta-2\end{vmatrix} = (\theta+1)(\theta-2)-(\theta+2)(\theta-1) = -2\theta$.

Ainsi, f_θ est bijective lorsque $\theta \neq 0$, c'est-à-dire $\theta \in \mathbb{R}^*$.

2. On suppose f_θ bijective.

a) Détermination de f_θ^{-1}, application réciproque de f_θ, en exprimant x et y en fonction de x' et y'.

$$\begin{cases}(\theta+1)x+(\theta-1)y=x'\\(\theta+2)x+(\theta-2)y=y'\end{cases}$$

On aboutit à : $\begin{cases}x = \dfrac{1}{2\theta}\left[(2-\theta)x'+(\theta-1)y'\right]\\ y = \dfrac{1}{2\theta}\left[(\theta+2)x'-(\theta+1)y'\right]\end{cases}$

b) Valeurs de θ pour lesquelles f_θ est involutive.

f_θ est involutive lorsque $f_\theta o f_\theta$ = id_P. Pour tout M ∈ P $(f_\theta o f_\theta)$(M)=M ; dans ce cas,

$f_\theta^{-1} = f_\theta$. Il s'en suit : $\begin{cases}\theta+1=\dfrac{2-\theta}{2\theta}\\ \theta-1=\dfrac{\theta-1}{2\theta}\\ \theta+2=\dfrac{\theta+2}{2\theta}\\ \theta-2=\dfrac{-(\theta+1)}{2\theta}\end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{1}{2}$

3. Ensemble des points invariants par f_θ suivant les valeurs de θ

Soit $M(x,y) \in P$, f(M) = M est réalisée si et seulement si les coordonnées de M vérifient le système : $\begin{cases}(\theta+1)x+(\theta-1)y=x\\(\theta+2)x+(\theta-2)y=y\end{cases}$.

Ce système équivaut à : $\begin{cases}\theta x+(\theta-1)y=0\\(\theta+2)x+(\theta-3)y=0\end{cases}$

Le déterminant de ce dernier système est : $\theta(\theta-3)-(\theta+2)(\theta-1)=2(1-2\theta)$

Si $\theta \neq \dfrac{1}{2}$, il y a un seul point : le point O origine du repère.

Si $\theta=\frac{1}{2}$, le système devient $\begin{cases} \frac{1}{2}(x\text{-}y)=0 \\ \frac{5}{2}(x\text{-}y)=0 \end{cases}$

dans cas, l'ensemble des points invariants par f_θ est la droite (D) d'équation : y=x.

4. Détermination de la nature et les éléments caractéristiques de f_θ pour $\theta=\frac{1}{2}$.

Dans ce cas, à la lumière des résultats obtenus aux questions 1. , 2.b) et 3. , f_θ est une application bijective, involutive et admettant la droite (D) d'équation y=x comme ensemble des points invariants ; par conséquent f_θ est une symétrie d'axe (D).

5. On prend θ =0 et on s'intéresse à f_0. L'application f_0 est définie par :

$$\begin{cases} x'=x\text{-}y \\ y'=2(x\text{-}y) \end{cases}$$

a) Détermination de (Δ), ensemble des points M' qui sont images par f_0 d'au moins un point de P.

Tout point M'(x',y') est tel que y'=2x' ; par conséquent l'ensemble des points M'(x',y') est inclus dans la droite d'équation y = 2x.

Réciproquement, étant donné un réel x', le point de coordonnées (x',2x') de la droite d'équation y = 2x est l'image d'au moins un point de P, à savoir le point de coordonnées (x',0). On peut donc conclure que (Δ) est la droite d'équation y = 2x.

b) Ensemble des points M de P tels que f_0(M)=M'.

Soit M'(x',y') un point donné de (Δ), on a d'une part y' = 2x' et d'autre part

$\begin{cases} x\text{-}y=x' \\ 2(x\text{-}y)=y'=2x' \end{cases}$ d'où y = x – x' ;

par suite M(x,y) appartient à la droite d'équation y = x – x'

De même, on vérifie que tout point M(x,y) avec y = x – x' a pour image M'(x',y'). En conclusion, un point M'(x',y') de (Δ) étant donné, l'ensemble des points M de P tels que f_0(M) = M' est la droite d'équation y = x – x'

c) Démonstration du fait que f_0 est la composée d'une projection et d'une homothétie et détermination de ses éléments caractéristiques.

A la lumière des résultats obtenus aux 5.a) et 5.b), on a : f_0 = poh où h est l'homothétie de centre O et de rapport (-1) (ou encore la symétrie centrale de centre O) et p est la projection sur (Δ) parallèlement à la droite (D) d'équation y = x. (On remarquera que poh= hop)

6. Démonstration par récurrence que, pour tout entier naturel n, $x_n = y_n = P_n(\theta)$ où $P_n(\theta)$ sera à préciser.

*Pour n=0, on a $A_0(1,1)$, ce qui donne bien $x_0 = y_0 = 1$; on pose $P_0(\theta)=1$

*Pour n = 1, on a $A_1 = f_0(A_0)$, d'où $x_1 = (\theta+1)x_0 +(\theta-1)y_0=(\theta+1)+(\theta-1) = 2\theta$ et $y_1=(\theta+2)x_0+(\theta-2)y_0=(\theta+2)+(\theta-2)=2\theta$; on a donc $x_1 = y_1 = P_1(\theta)$ où $P_1(\theta) = 2\theta$.

*Supposons que l'on ait : $x_{n-1} = y_{n-1} = P_{n-1}(\theta)$, que peut-on dire de x_n et y_n ?

On a $A_n(x_n,y_n)$ avec $A_n = f^n{}_\theta(A_0)=(f_\theta o f^{n-1}{}_\theta)(A_0)= f_\theta[f^{n-1}{}_\theta)(A_0)]= f_\theta(A_{n-1})$.

Par suite : $\begin{cases} x_n = (\theta+1)x_{n-1} + (\theta-1)y_{n-1} \\ y_n = (\theta+2)x_{n-1} + (\theta-2)y_{n-1} \end{cases}$

Or $x_{n-1}=y_{n-1}= P_{n-1}(\theta)$; donc $x_n =2\theta x_{n-1} = 2\theta y_{n-1}=2\theta P_{n-1}(\theta)$ et $yn =2\theta x_{n-1} = 2\theta y_{n-1}=2\theta P_{n-1}(\theta)$

On obtient bien $x_n = y_n = P_n(\theta)$ avec $P_n(\theta)= 2\theta P_{n-1}(\theta)$.

En conclusion, on a : pour tout n de $\angle$, $x_n = y_n = P_n(\theta)$

La suite $(P_n(\theta))$ est une suite géométrique de raison 2θ et de premier terme $P_0(\theta)=1$;

d'où $P_n(\theta) = (2\theta)^n = 2^n\theta^n$ $d°P_n = n$.

Partie B

$\theta \in \left]0, \pi\right[$

1. a) Vérification que $(\sin\theta)e^{i\theta} \notin 3$.

$(\sin\theta)\, e^{i\theta} = \sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)= \sin\theta\cos\theta + i\sin^2\theta$

Comme $\theta \in \left]0, \pi\right[$, alors $0 < \sin\theta \leq 1$, ce qui entraine $\sin^2\theta \neq 0$; la partie imaginaire de $(\sin\theta)\, e^{i\theta}$ ne s'annulant pas, $(\sin\theta)\, e^{i\theta}$ ne peut être un réel.

b) Déduction du fait que $1 - (\sin\theta)\, e^{i\theta} \neq 0$

$1 - (\sin\theta)\, e^{i\theta} = 0$ équivaut à $\sin\theta\, e^{i\theta} = 1$; ce qui est impossible car d'après 1. a) $\sin\theta\, e^{i\theta} \notin 3$. ; donc $1 - \sin\theta\, e^{i\theta} \neq 0$.

2. Soit $n \in \angle$, on pose $a_n = z_{n+1} - z_n$

a) Démonstration du que pour tout $n \in \angle^*$, on a : $a_n = (\sin\theta)\, e^{i\theta}\, a_{n-1}$.

$M_nM_{n+1} = \sin\theta\, M_{n-1}M_n$; donc $|z_{n+1} - z_n|= \sin\theta|z_n - z_{n-1}|$; soit $|a_n| = \sin\theta|a_{n-1}|$;

or $M_{n-1} \neq M_n$, donc $a_{n-1} \neq 0$, d'où $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \sin\theta$. (1)

$\left(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) = \theta$; donc $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}}\right) = \theta\ (2\pi)$; soit $\arg\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \theta\ (2\pi)$ (2)

De (1) et (2), on tire que $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \sin\theta e^{i\theta}$; d'où $a_n = (\sin\theta)\, e^{i\theta}.\, a_{n-1}$.

b) Déduction du fait que : $a_n = (\sin^n\theta)\, e^{in\theta}$.

L'égalité $a_n = (\sin\theta)\, e^{i\theta}.\, a_{n-1}$ de la question 2. a) permet de dire que (a_n) st une suite géométrique de raison $\sin\theta\, e^{i\theta}$ et de premier terme $a_0 = z_1 - z_0 = 1$. Il en résulte que : pour tout $n \in \angle$, $a_n = (\sin\theta\, e^{i\theta})^n a_0$; soit $a_n = \sin^n\theta\, e^{in\theta}$.

3. a) Démonstration par récurrence du fait que pour tout entier naturel non nul n, $z_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$.

* On a bien $z_1 = a_0$

* Supposons que $z_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$; que se passe-t-il pour z_{n+1} ?

Par définition , $a_n = z_{n+1} - z_n$, ce qui donne $z_{n+1} = a_n + z_n$; or $z_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$; donc $z_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}+a_n$

* On peut conclure que pour tout $n \in \angle^*$, on a : $z_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$.

b) Déduction du fait que , pour tout n∈ $\angle^*$, $z_n = \frac{1}{1-\sin\theta e^{i\theta}} - \frac{(\sin^n\theta)e^{in\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$

$z_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $\sin\theta\, e^{i\theta}$; d'où

$$z_n = a_0 \times \frac{1-\left(\sin\theta e^{i\theta}\right)^n}{1-\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{1}{1-\sin\theta e^{i\theta}} - \frac{\sin^n\theta e^{in\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$$

On rappelle que d'après la question 1. b), on a $1 - \sin\theta\, e^{i\theta} \neq 0$.

c) Vérification immédiate pour n = 0 ; on trouve $z_0 = 0$.

3. a) Démonstration

Il existe une similitude plane directe S telle que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1)=M_2$.

S existe si et seulement si il existe deux nombres complexes a, (a≠ 0) et b tels que :

pour tout M ∈ P avec S(M) = M', z' = az + b.

$S(M_0) = M_1$ donne $z_1 = az_0 + b$, d'où b = 1 car $z_0 = 0$

$S(M_1) = M_2$ donne $z_2 = az +1$, or $z_1 = 1$, donc $z_2 = a + 1$. Or d'après la question 3. b) on

a : $z_2 = \frac{1}{1-\sin\theta e^{i\theta}} - \frac{\sin^2\theta e^{2i\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{\left(1-\sin\theta e^{i\theta}\right)\left(1+\sin\theta e^{i\theta}\right)}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$ = $1+ \sin\theta\, e^{i\theta}$

$\sin\theta\, e^{i\theta} = a + 1$ donne $a = \sin\theta\, e^{i\theta}$.

En conclusion, S existe et l'application complexe qui lui est associée est telle que :

$z \mapsto z' = (\sin\theta\, e^{i\theta})z + 1$

b) Détermination des éléments caractéristiques de S.

Le rapport de S est $r = |\sin\theta\, e^{i\theta}| = \sin\theta$ et l'angle de S est $\alpha = \arg(\sin\theta\, e^{i\theta}) = \theta$.

Le centre de S est le point Ω d'affixe $\frac{1}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$.

c) Démonstration du fait que pour tout entier naturel n, $S(M_n) = M_{n+1}$ où M_n et M_{n+1} ont pour affixes respectives z_n et z_{n+1}.

On sait que $z_n = \frac{1-\sin^n e^{i\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$ et $z_{n+1} = \frac{1-\sin^{n+1}\theta e^{i(n+1)\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$

L'expression complexe de S étant : $z \mapsto z' = (\sin\theta\, e^{i\theta})z + 1$,

on a $\sin\theta\, e^{i\theta} z_n + 1 = \sin\theta e^{i\theta}\left(\frac{1-\sin^n\theta e^{in\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}}\right)+1 = \frac{1-\sin^{n+1}\theta e^{i(n+1)\theta}}{1-\sin\theta e^{i\theta}}$ = z_{n+1}.

On a bien $z_{n+1} = 1 + \sin\theta\, e^{i\theta} z_n$; ce qui traduit le fait que $S(M_n) = M_{n+1}$.

Session Normale 2012 ; 2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1.

1. a) Détermination du module et d'un argument de 1-u

$$1\text{-u} = 1 - e^{i\theta} = -e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right) = -2i\sin(\tfrac{\theta}{2})e^{\frac{i\theta}{2}}$$

$$=2\sin(\tfrac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}$$

Comme $\frac{\theta}{2} \in]0,\pi[$; $\sin\frac{\theta}{2} \succ 0$; d'où $|1-u| = 2\sin(\frac{\theta}{2})$ et $\arg(1-u) = \frac{\theta\text{-}\pi}{2}$.

b) Détermination du module et d'un argument

De a), il vient que : $\left|\frac{1}{1-u}\right| = \frac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$ et $\arg\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{\pi\text{-}\theta}{2}$.

2. a) Démonstration

|u| = 1 ⇔ |1-z|=1 ⇔ AM = 1 ⇔ M ∈ C(A ;1) ; de plus OA = 1, donc O ∈ C(A ;1)

b) Démonstration

Pour u ∈ U^*, $z = \frac{1}{1-u} \Rightarrow u = \frac{z\text{-}1}{z}$

Ainsi : * Si |u|=1, alors |z-1| = |z| et AM = OM ; donc M∈ (D)

* Si M∈ (D), alors AM=OM et |z-1| = |z| ; d'où $\left|\frac{z\text{-}1}{z}\right| = 1$.

Soit $u = \frac{z\text{-}1}{z}$, alors u ∈ U^* et $z = \frac{1}{1-u}$.

3. On a |z-b| = MB

a) Détermination de l'ensemble

$u = \frac{b\text{-}z}{b} \in U$;

ce qui implique MB=OB et M ∈ C(B ;OB).

Si MB = OB, alors |b-z| = |b|

En posant $u = -\frac{z\text{-}b}{b} = \frac{b\text{-}z}{b}$, alors u ∈ U et z = b(1-u)

L'ensemble des points M d'affixe z=b(1-u) est C(B ;OB).

b) Détermination de l'ensemble

$$\begin{cases} u\in U^* \\ z=\dfrac{b}{1-u}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\in U^* \\ u=\dfrac{z-b}{z}\end{cases} \Rightarrow |z-b|=|z| \Rightarrow BM=OM$$

De même, BM=OM implique $|z-b|=|z|$ et $z=\dfrac{b}{1-u}$ avec $u=\dfrac{z-b}{z}\in U^*$

Ainsi, l'ensemble des points M est la médiatrice de [BO].

Exercice2

1. Définition des événements

   $E\cap M$ est l'événement « la machine est déréglée électroniquement et mécaniquement »

   $E\cup M$ est l'événement « la machine est déréglée »

   $\overline{E}\cap\overline{M}$ est l'événement « la machine n'est pas déréglée »

2. a) Calcul de $p(E\cap M)$

   $p(E\cap M)=p(E)\times p(M/E)=\dfrac{3}{1000}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2000}$

   Comme p(E)p(M) = $p(E)\times\dfrac{7}{3}p(E)=\dfrac{21}{10^6}$; alors $p(E\cap M)\neq p(E).p(M)$

   On en déduit que E et M ne sont pas indépendants.

   b) Calcul de $p(E\cup M)$

   $p(E\cup M) = p(E) + p(M) - p(E\cap M)=\dfrac{17}{2000}$

3. Calcul de $p(E\cap M/E\cup M)$

   $p(E\cap M/E\cup M) = \dfrac{p\left[(E\cap M)\cap(E\cup M)\right]}{p(E\cup M)}=\dfrac{p(E\cap M)}{p(E\cup M)}$ car $E\cap M\subset E\cup M$ et donc

   $(E\cap M)\cap(E\cup M) = E\cap M$; ainsi $p(E\cap M/E\cup M) = \dfrac{3}{17}$

4. Calcul de $p(\overline{E}\cap\overline{M})$

   $\overline{E}\cap\overline{M}$ est l'événement contraire de $E\cup M$; par conséquent

   $$\begin{aligned} p(\overline{E}\cap\overline{M}) &= p(\overline{E\cup M}) \\ &=1-p(E\cup M) \\ &=1-\dfrac{17}{2000}\end{aligned}$$

   $p(\overline{E}\cap\overline{M}) = \dfrac{1983}{2000}$

5. Détermination de loi de probabilité de X et calcul de E(X)
L'ensemble des valeurs prises par X est {0, 1, 2}

$p(X=0) = p(\overline{E}\cap\overline{M}) = \frac{1983}{2000}$;

$p(X=1) = p(E\cap\overline{M}) + p(M\cap\overline{E})$

$= [p(E) - p(E\cap M)]\, E\cap M + [p(M) - p(E\cap M)]$

$= \frac{3}{1000} - \frac{3}{2000} + \frac{7}{1000} - \frac{3}{2000}$

$p(X=1) = \frac{7}{1000}$

$p(X=2) = p(E\cap M) = \frac{3}{2000}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1983}{2000}$	$\frac{7}{1000}$	$\frac{3}{2000}$

$E(X) = 0.\frac{1983}{2000} + 1.\frac{7}{1000} + 2.\frac{3}{2000}$; $E(X) = \frac{1}{100}$

Problème

Partie A

1. <u>Continuité de f en 0</u>

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\ln(1+x) - \sqrt{x}\ln x\right] = 0$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$; donc f est continue en 0.

2. <u>Dérivabilité de f en 0</u>

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$; donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = +\infty$; donc f n'est pas dérivable en 0 à droite.

<u>Conclusion</u> : f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique : (C) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes ; l'une verticale et l'autre de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

3. <u>Dérivabilité de f en -1</u>

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1+\sqrt{1-x^2}}{(x+1)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\left[\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-x}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}}\right]=+\infty \ ;$$

f n'est pas dérivable en -1.

4. <u>Variation de f sur [-1 ;0]</u>

La fonction f est dérivable sur]-1 ;0[et pour tout x $\in$]-1 ;0[,

f '(x) = $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}}$

Pour tout x $\in$]-1 ;0[, f '(x) $>$ 0, donc f est strictement croissante sur [-1 ;0].

Partie B

1. a) Les variations de g sur] 0 ; $+\infty$[

La fonction g et dérivable sur]0 ; $+\infty$[et pour tout x $\in$]0 ; $+\infty$[, g '(x) = $\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$.

On a : g '(1) = 0 ; g '(x) $>$ 0 pour x $\in$]1 ; $+\infty$[; g '(x) < 0 pour x $\in$]0 ; 1 [.

Ainsi, g est croissante sur [1 ; $+\infty$[et décroissante sur]0 ; 1].

2. Limites de g en $+\infty$ et en 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{2}{x+1}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{2}{x+1}\right)=+\infty$.

3. a) Tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
g '(x)	‖	-	0	+	
g(x)	‖ $+\infty$	↘	-1+ln2	↗	0

b) Solution unique

g([1 ; $+\infty$[) = [-1+ln2 ; 0[et 0 $\notin$ [-1+ln2 ; 0[; donc l'équation g(x) = 0 n'admet pas de solution dans [1 ; $+\infty$[.

g est continue et strictement décroissante sur]0 ; 1[et 0 $\in$]-1+ln2 ; $+\infty$[= g(]0 ;1[).
Donc l'équation g(x)=0 admet une unique solution dans]0 ;1[; en définitive, l'équation g(x)=0 admet une solution unique α dans]0 ; $+\infty$[.
g(0,25) $>$ 0 et g(0,26) < 0, donc $\alpha \in$]0,25 ; 0,26[.

4. Signe de g(x)

g(α)=0 ; $x \in]0\ ;\ \alpha[$, $g(x) > 0$ et $x \in]\alpha\ ;+\infty[$, $g(x) < 0$.

5. a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}g(x)$

La fonction f est dérivable sur] 0 ; $+\infty$[.

Pour tout x de] 0 ; $+\infty$[, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+\dfrac{1}{x})+\sqrt{x}\times\dfrac{-1}{x(x+1)}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}g(x)\,.$$

b) Variation de f sur] 0 ; $+\infty$[

Pour tout x de] 0 ; $+\infty$[, f '(x) et g(x) ont le même signe, donc f est croissante sur]0 ; α] et f est décroissante sur [α ; $+\infty$ [.

6. Limite de f en $+\infty$

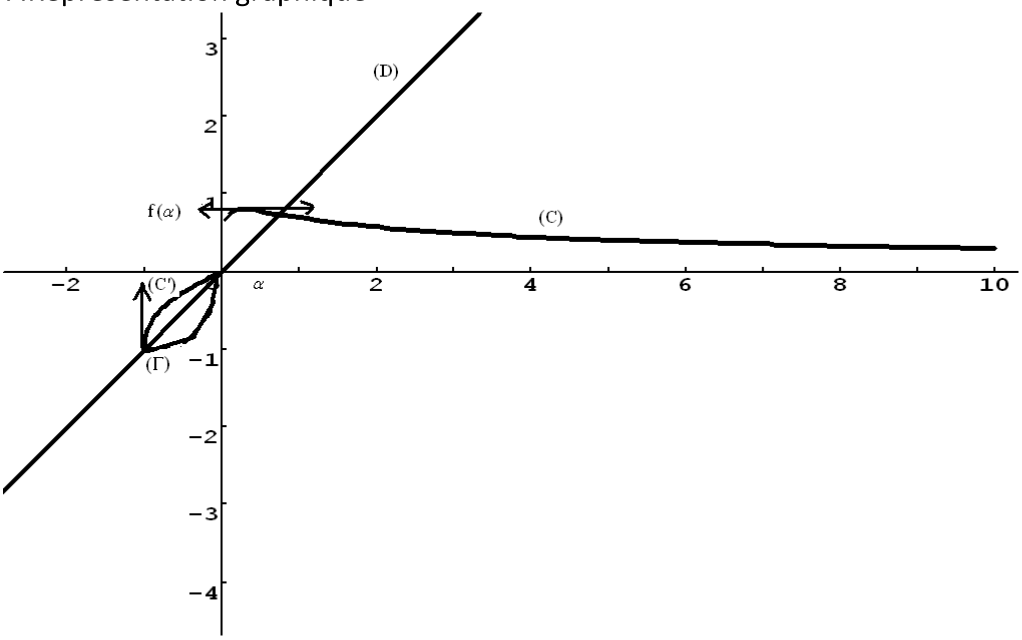
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{\sqrt{X}}=\lim_{X\to0^+}\sqrt{X}\,\frac{\ln(1+X)}{X}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{\sqrt{X}}=\lim_{X\to0^+}\sqrt{X}\,\frac{\ln(1+X)}{X}=0$$

Tableau de variation

X	-1		0		α		$+\infty$
f '(x)		+	$\Vert$	+	0	-	
f(x)	-1	$\nearrow$			f(α)	$\searrow$	0

7.Représentation graphique



Partie C

1. a) h bijective

   La fonction h est continue et strictement croissante sur [-1 ; 0], donc h est une bijection de [-1 ; 0] sur J = [-1 ; 0].

   b) Tableau de variation de h^{-1}

   La fonction h étant croissante sur I, alors h^{-1} est croissante sur J.

x	-1	0
$h^{-1}(x)$	-1 ↗	0

2. a) Détermination de $h^{-1}(x)$

   $y=h(x) \Leftrightarrow y+y\sqrt{1-x^2}=x \Leftrightarrow x=\frac{2y}{y^2+1}$

   Pour tout x de J $h^{-1}(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

   b- Calcul de $\int_{-1}^{0} h^{-1}(x)dx$

   $\int_{-1}^{0} h^{-1}(x)dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{0} = -\ln 2$

3. a) Calcul de A.

   (Γ) est en dessous de la droite d'équation y = x sur [-1 ; 0],

   donc A = $\int_{-1}^{0}\left[x-h^{-1}(x)\right]dx$; A = $\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\ln 2=-\frac{1}{2}+\ln 2$

   b) Déduction de l'aire A'

   Les réflexions conservent les aires, alors A' = 2 A ; alors A' = -1+2ln2.

Partie D

1. a) Démonstration

   On a n ≤ n+ k ≤2n, $n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow \frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+k} \le \frac{1}{n}$

   $\Rightarrow \frac{1}{2n}-1 \le \frac{1}{n+k}-1 \le \frac{1}{n}-1$

   Or $\frac{1}{2n} \succ -1$ et $\frac{1}{n}-1 \le 0$, alors $-1 \le \frac{1-2n}{2n} \le \frac{1}{n+k}-1 \le \frac{1-n}{n} \le 0$

   b) Déduction

   La fonction h^{-1} étant croissante, $h^{-1}\left(\frac{1-2n}{2n}\right) \le h^{-1}\left(\frac{1}{n+k}-1\right) \le h^{-1}\left(\frac{1-n}{n}\right)$

2. De la relation précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} h^{-1}\left(\frac{1\text{-}2n}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} h^{-1}\left(\frac{1}{n+k}-1\right) \leq \sum_{k=0}^{n} h^{-1}\left(\frac{1\text{-}n}{n}\right)$$

D'où $(n+1)h^{-1}\left(\frac{1\text{-}2n}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} h^{-1}\left(\frac{1}{n+k}-1\right) \leq (n+1)h^{-1}\left(\frac{1\text{-}n}{n}\right)$

et $\frac{n+1}{n}h^{-1}\left(\frac{1\text{-}2n}{2n}\right) \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}h^{-1}\left(\frac{1\text{-}n}{n}\right)$

3. Limite de (u_n)

Comme h^{-1} est continue et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$; alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}h^{-1}\left(\frac{1\text{-}2n}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}h^{-1}\left(\frac{1\text{-}n}{n}\right) = h^{-1}(-1) = -1$$

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1\text{-}2n}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\text{-}n}{n} = -1$

De l'encadrement de 2., il vient que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Session Normale 2013 ; 1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1

1) a) Calcul de limites

f(x) = $\frac{x}{e^{x-1}} = exe^{-x}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e \times \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} exe^{-x} = -\infty$.

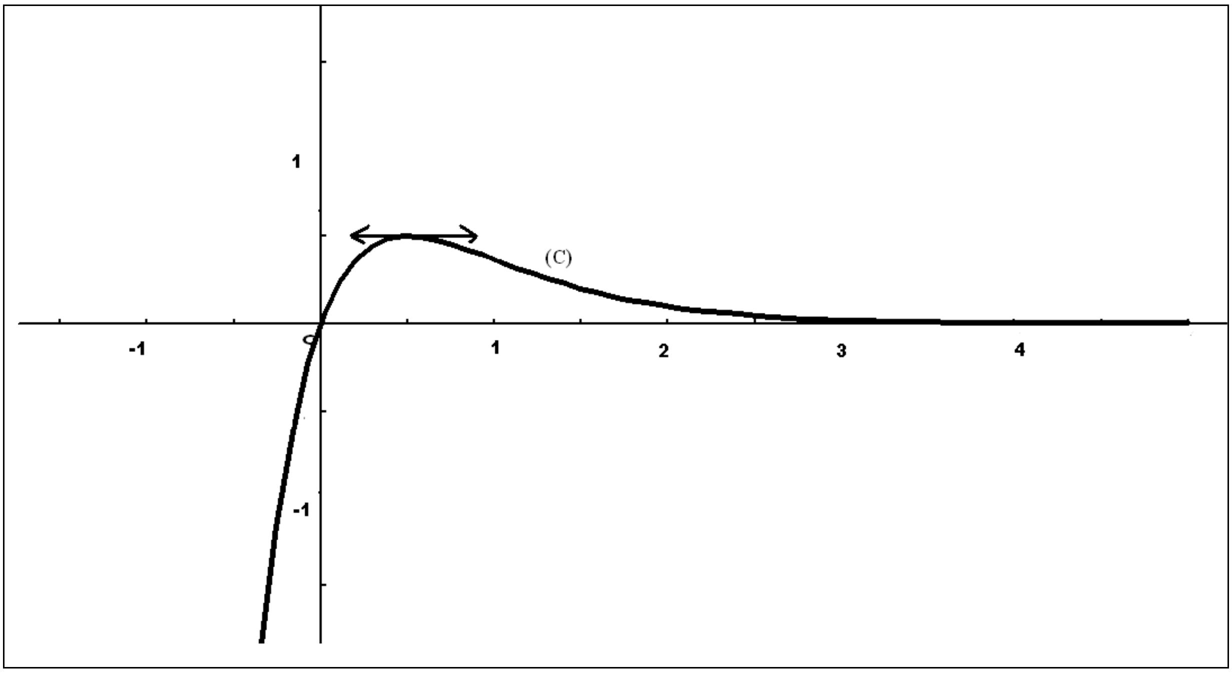
b) Variations de f

f'(x) = $\frac{e^{x-1} - xe^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{(1-x)e^{x-1}}{(e^{x-1})^2} = \frac{1-x}{e^{x-1}}$. Le signe de f' dépend exclusivement de celui de

1 – x. f'(x) > 0 sur]-∞, 1[, f est donc croissante sur l' intervalle] -∞, 1] ; f'(x) < 0 sur]1, +∞[, f est décroissante sur l'intervalle [1, +∞[. f'(1) = 0.

X	-∞ +∞	1	
f'(x)	+	0	-
f(x)	-∞ 0	1	

c)Tracé de la courbe ©



2) a) Expression de $g_n(x)$ en fonction de x

$g_n(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

b) Déduction de l'expression de $S_n(x)$

$S_n(x) = g_n'(x) = \dfrac{(n+1)x^n(x-1)-1\times(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

3) a) Expression de u_n

$u_n = 1+\dfrac{2}{e}+\dfrac{3}{e^2}+\dfrac{4}{e^3}+.............+\dfrac{n}{e^{n-1}} = S_n(\dfrac{1}{e}) = \dfrac{\dfrac{1}{e^n}(\dfrac{n}{e}-n-1)+1}{(\dfrac{1}{e}-1)^2} = \dfrac{e^{n+1}-(n+1)e+n}{e^{n-1}(1-e)^2}$.

b) Limite de u_n

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n+1}-(n+1)e+n}{e^{n-1}(1-e)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^2-\dfrac{n+1}{e^{n-2}}+\dfrac{n}{e^{n-1}}}{(1-e)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^2}{(1-e)^2}$ car

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \times \lim\limits_{x\to x_0}\left[1-f(x)f(x_0)\right]$.

EXERCICE 2

1) Résolution de l'équation

f(z) = z $\Leftrightarrow (\dfrac{1-i}{2})z-2+2i = z$; z = 4i donc S∀={4i}

2) Nature de f et éléments caractéristiques

f est une similitude plane directe de centre Ω(4i) de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

3) Démonstration

X +iY= $\dfrac{1}{2}(x+y-4)+\dfrac{1}{2}(-x+y+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = X-Y+4 \\ y = X+Y \end{cases}$.

4) Démonstration

xy - 2x – 3y – 1 = 0 ⇔ (X – Y + 4)(X + Y) –2(X – Y + 4) – 3(X + Y) – 1 = 0. En développant on trouve : X² - Y² + 4X + 4Y – 2X + 2Y – 8 – 3X – 3Y – 1 = 0. Soit X² - X–(Y² - 3Y) – 9 = 0.

La courbe (C') a donc pour équation (X - $\dfrac{1}{2}$)² - (Y - $\dfrac{3}{2}$)² - 7 = 0.

5) Nature de (c')

(C') qui a pour équation réduite : $\dfrac{\left(\text{X-}\dfrac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} - \dfrac{\left(\text{Y-}\dfrac{3}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = 1$ est une hyperbole

équilatère d'excentricité $\sqrt{2}$.

PROBLEME

PARTIE A

1) a) Limites

$\lim_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$

b) Calcul de g'(x) et déduction du sens de variation de g

g'(x) = $\dfrac{\dfrac{\dfrac{2}{(1-x^2)}}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} = \dfrac{1}{1-x^2}$. g'(x) est positif sur]-1, 1[. g est croissante.

c) Bijection

g est une fonction continue et strictement croissante sur]-1, 1[. Elle est donc bijective. g réalise donc une bijection de]-1, 1[sur IR.

2) a) Démonstration

$y = \ln(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}) \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = e^{2y}$. On peut ainsi tirer x = $\dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$. On a donc h(x) = $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

b) Démonstration

h est définie sur IR. Donc si x$\in$ $D_h$$\Leftrightarrow$ -x$\in$ D_h. h(-x) = $\dfrac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ = - h(x).

h est donc impaire.

Démonstration

3) $\dfrac{h(x)+h(y)}{1+h(x)h(y)} = \dfrac{\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+\dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1+\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.\dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}} =$

$\dfrac{(e^{2x}-1)(e^{2y}+1)+(e^{2x}+1)(e^{2y}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)} \times \dfrac{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)+(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)} =$

$\dfrac{2e^{2x+2y}-2}{2e^{2x+2y}+2} = \dfrac{e^{2x+2y}-1}{e^{2x+2y}+1} = h(x+y)$

PARTIE B

1) Démonstration

Pour tout réel x, on peut trouver un réel y tel que x + y = c. On aura alors :

f(c) = f(x + y) = $\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} \Leftrightarrow f(x)+f(y) = f(c)+f(c)f(x)f(y)$.

$\Leftrightarrow$ f(x)[1 – f(c)f(y)] + [f(y) – f(c)] = 0.

-Pour f(c) = 1, cette égalité est [f(y) – 1][1 – f(x)] = 0. Donc, pour tout x, réel f(x) = 1 ou f(c – x) = 1. f est alors constante et égale à 1.

-Pour f(c) = -1, on a [f(y) + 1][f(x) + 1] = 0. Donc, pour tout x, f(x) = -1 ou f(c-x) = -1. f est alors constante et égale à -1. Dans les deux cas f est constante.

Autre méthode :

Supposons qu'il existe un réel c tel que f(c) = 1. (I) a un sens lorsque f ne prend pas la valeur (-1).

Par suite, pour tout réel x, f(x+c) = $\frac{f(x)+f(c)}{1+f(x)f(c)} = \frac{f(x)+1}{1+f(x)}$ = 1, ce qui montre que f est constante et égale à 1.

Démarche analogue pour le cas où f(c) = -1.

2) a) Démonstration

$f(x) = f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) = \frac{2f(\frac{x}{2})}{1+[f(\frac{x}{2})]^2}$. En posant f($\frac{x}{2}$) = u l'expression devient $\frac{2u}{1+u^2}$. Cette expression peut être encadrée en disant u² - 2|u| + 1 ≥ 0 ⇔2|u| ≤u² + 1 et par suite $\frac{2|u|}{1+u^2}$≤ 1 donc -1 ≤$\frac{2u}{1+u^2}$≤ 1. Comme f est non constante, alors u ≠1 et u ≠-1. En conclusion -1 ≤ f(x) ≤ 1.

b) Etablissement et déduction

Posons x = y = 0. Il vient que f(0) = $\frac{2f(0)}{1+f(0)^2}$ donc f(0)[f(0)²-1] = 0. Comme f(0) ≠ 1 et -1, alors f(0) = 0.

f[x + (-x)] = f(0) = $\frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)} = 0$ implique que f(x) + f(-x) = 0 et donc f(-x) = - f(x). f est donc impaire.

3) Démonstration

La formule est vraie pour n = 0 et pour n =1. Supposons que la formule est vraie pour n : $\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$.

$$\frac{1+f[(n+1)x]}{1-f[(n+1)x]} = \frac{1+f(nx+x)}{1-f(nx+x)} = \frac{1+\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}}{1-\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}} = \frac{1+f(nx)f(x)+f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)-f(nx)-f(x)}$$

$$= \frac{[1+f(nx)][1+f(x)]}{[1-f(nx)][1-f(x)]} = \frac{1+f(nx)}{1-f(nx)}\times\frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \left(\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)}\right)^n\times\frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \left(\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)}\right)^{n+1}.$$

La formule est donc vraie pour n + 1.

4) a) Expression de f(n) en fonction de n

Faisant x = 1 dans la formule précédente, on obtient pout tout $n \in$ IN.

$\frac{1+f(n)}{1-f(n)} = \left(\frac{1+f(1)}{1-f(1)}\right)^n = a^n$. On en tire f(n) = $\frac{a^n-1}{a^n+1}$ pour $n \in$ IN. Prenons un entier négatif k et posons k = -n. Comme f est impaire, f(k) = f(-n) =

$-\frac{a^{-n}-1}{a^{-n}+1} = -\frac{1-a^n}{1+a^n} = \frac{a^n-1}{a^n+1} = \frac{a^{-k}-1}{a^{-k}+1}$.

b) Expression de f(n) en fonction de a

x = $\frac{p}{q} \Leftrightarrow$ p = qx. f(p) = f(qx). Dans la relation $\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$ on peut tirer, en prenant n = q, f(p) = f(qx) = $\frac{\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^q - 1}{\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^q + 1} = \frac{a^p-1}{a^p+1}$. On en déduit que f($\frac{p}{q}$) = $\frac{a^{\frac{p}{q}}-1}{a^{\frac{p}{q}}+1}$.

PARTIE C

Dérivabilité de f

1) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x-x_0)[1+f(x)f(-x_0)]}{x-x_0}$

$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x-x_0)}{x-x_0}\times\lim_{x\to x_0}[1+f(x)f(-x_0)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times\lim_{x\to x_0}\left[1-f(x)f(x_0)\right]$ =α× [1 - $(f(x_0))^2$]. D'où, f'(x) = α [1 + $(f(x))^2$]. En effet f étant impaire f($-x_0$) = -f(x_0).

2) Démonstration

-1 < f(x) < 1 donc f'(x) est du signe de α. f'(x) ayant un signe constant, f est strictement monotone.

3) a) Calcul et déduction

[fof^{-1}](x) = x. [fof^{-1}]'(x) = 1 = (f^{-1})'(x).f'(f^{-1}(x)). On en tire (f^{-1})'(y)=

$\frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{\alpha(1-y^2)}$.

b) Vérification et déduction

$\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}) = \frac{1}{2}\frac{1+x+1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$. Une primitive de x$\to\frac{1}{1-x^2}$ sur]-1, 1[est

$\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)] = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ = g(x)

c) Déduction

f^{-1}(x) = $\frac{1}{\alpha}$ g(x) + K. Si α = 1 et K = 0, f(x) = h(x).

Session Normale 2013 ; 2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice1

1) Ecriture de l'équation différentielle (F)

(E) : $(100 - x(t))' = ax(t)$; soit $-x'(t) = ax(t)$; d'où $x'(t) + ax(t) = 0$.
L'équation différentielle (F) s'écrit donc : $x'(t) + ax(t) = 0$

2) Solution générale de (F)

La solution générale de (F) est : $x(t) = Ce^{-at}$ où C est une constante arbitraire de $\mathbb{R}$.
3) Déduction de la solution générale de (E)

La solution générale de (E) est alors $f(t) = 100 - Ce^{-at}$

4) Expression de f(t) en fonction de t

Si $f(0) = 0{,}001$, alors $100 - C = 0{,}001$ et $C = 99{,}999$ et $f'(t) = (100 - 99{,}999\, e^{-at})' = 99{,}999\, ae^{-at}$;

donc $f'(0) = 99{,}999a = 33{,}333.10^{-4}$ et $a = \dfrac{33{,}333.10^{-4}}{99{,}999} = \dfrac{10^{-4}}{3}$;

on a alors $f(t) = 100 - 99{,}999\, e^{-\frac{10^{-4}}{3}t}$

5) Calcul du temps

Il s'agit de résoudre l'équation : $f(t) \geq 0{,}02$.

On a : 100 – et p3 = $99{,}999\, e^{-\frac{10^{-4}}{3}t} \geq 0{,}02$; soit $-99{,}999\, e^{-\frac{10^{-4}}{3}t} \geq -99{,}98$; c'est-à-dire $e^{-\frac{10^{-4}}{3}t} \leq \dfrac{99{,}98}{99{,}999}$; d'où $-\dfrac{10^{-4}}{3}t \leq \ln\left(\dfrac{99{,}98}{99{,}999}\right)$; soit $-\dfrac{10^{-4}}{3}t \leq -1{,}9.10^{-4}$; on a :

$t \geq \dfrac{-1{,}9.10^{-4}}{-10^{-4}} \times 3$; ce qui donne $t \geq 5{,}7\text{mn}$.

Exercice2

1) Calcul de p_1, p_2 et p_3

Comme p_1, p_2 et p_3 dans cet ordre, forment des termes d'une progression géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$, on a : $p_2 = qp_1$ et $p_3=q^2p_1$; c'est-à-dire $p_2 = \dfrac{1}{2}p_1$ et $p_3=\dfrac{1}{4}p_1$. On a alors $p_1+ \dfrac{1}{2}p_1 + \dfrac{1}{4}p_1 = 1$; soit $p_1 = \dfrac{4}{7}$; d'où $p_2=\dfrac{2}{7}$ et $p_3=\dfrac{1}{7}$.

2) a) Gains possibles du joueur

Les gains possibles sont : -500 ; 0 ; 500. On pourra les déterminer à l'aide d'un arbre.

b) Détermination de la loi de probabilité de X en fonction de x

$$P(X=-500) = \frac{C_2^1 . C_n^1}{C_{n+2}^2} + \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} \times \frac{4}{7} = \frac{28n+8}{7(n+2)(n+1)}$$

$$P(X=0) = \frac{C_n^2}{C_{n+2}^2} + \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} \times \frac{2}{7} = \frac{7n^2-7n+4}{7(n+2)(n+1)}$$

$$P(X=500) = \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{7(n+2)(n+1)}$$

x_i	-500	0	500
$P(X=x_i)$	$\frac{28n+8}{7(n+2)(n+1)}$	$\frac{7n^2-7n+4}{7(n+2)(n+1)}$	$\frac{2}{7(n+2)(n+1)}$

3.n=5

a) Calcul de E(X)

Si n = 5, on a :

x_i	-500	0	500
$P(X=x_i)$	$\frac{148}{294}$	$\frac{144}{294}$	$\frac{2}{294}$

E(X) = - 248,3

b) Détermination et construction de la fonction de répartition

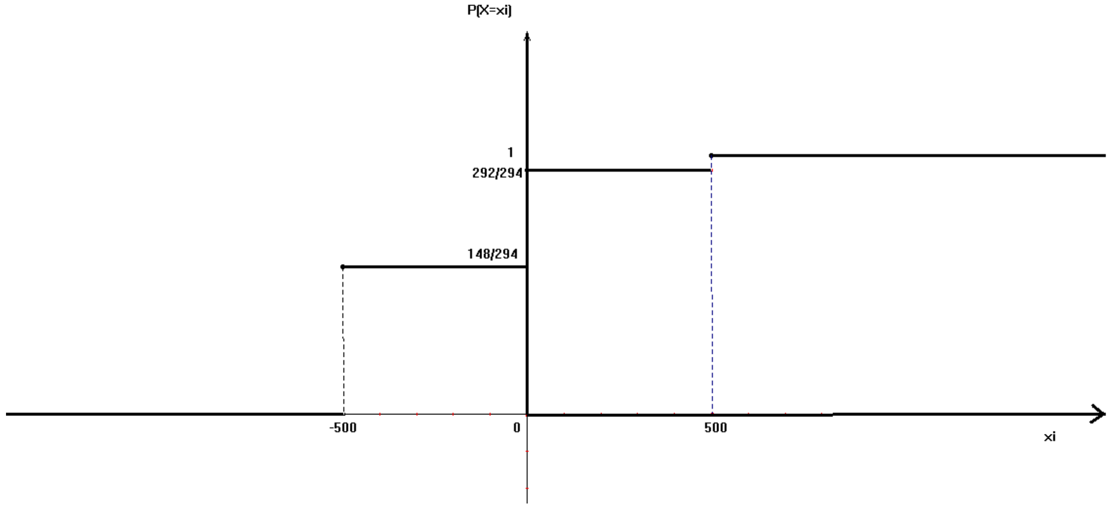
Si $x \in]-\infty; -500[$, alors $F(X) = 0$

si $x \in [-500 ; 0[$, alors $F(X) = \frac{148}{294}$

si $x \in [0 ; 500[$, alors $F(X) = \frac{292}{294}$

Si $x \in]500 ; +\infty[$, alors $F(X) = 1$

Construction de F



Problème

A) 1. y = f(x) = $\sqrt{x^2+4x+2}$ sur $]-\infty\,;-2-\sqrt{2}\,]\cup[-2+\sqrt{2}\,;+\infty[$

a) Calcul de limites et détermination des asymptotes

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+4x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+2}+(x+2)\right]$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+4x+2}+(x+2)\right]\left[\sqrt{x^2+4x+2}-(x+2)\right]}{\sqrt{x^2+4x+2}-(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-x\left[\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right]}=0^-$$

De même $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$

Conclusion : les droites (D_1) : y=-x-2 et (D_2) : y=x+2 sont asymptotes à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Variations de f et tableau de variations

f est dérivable sur $]-\infty\,;-2-\sqrt{2}\,[\,\cup\,]-2+\sqrt{2}\,;+\infty[$ et on a : $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}}$;

donc f ’ (x) est du signe de x+2.

*Si x $\in$]-∞ ;-2-$\sqrt{2}$ [, alors f '(x) < 0 et f est strictement décroissante sur]-∞ ;-2-$\sqrt{2}$]

*Si x $\in$]-2+$\sqrt{2}$; +∞[, alors f '(x) >0 et f est strictement croissante sur [-2+$\sqrt{2}$; +∞[

*f est non dérivable en -2-$\sqrt{2}$ et en -2+$\sqrt{2}$ et

$$\lim_{x\to(-2-\sqrt{2})^-} \frac{f(x)}{x+2+\sqrt{2}} = -\infty; \qquad \lim_{x\to(-2+\sqrt{2})^+} \frac{f(x)}{x+2-\sqrt{2}} = +\infty$$

La courbe (C) admet aux points d'abscisses -2-$\sqrt{2}$ et -2 +$\sqrt{2}$ des tangentes verticales.

$f(-2-\sqrt{2})=f(-2+\sqrt{2})=0$

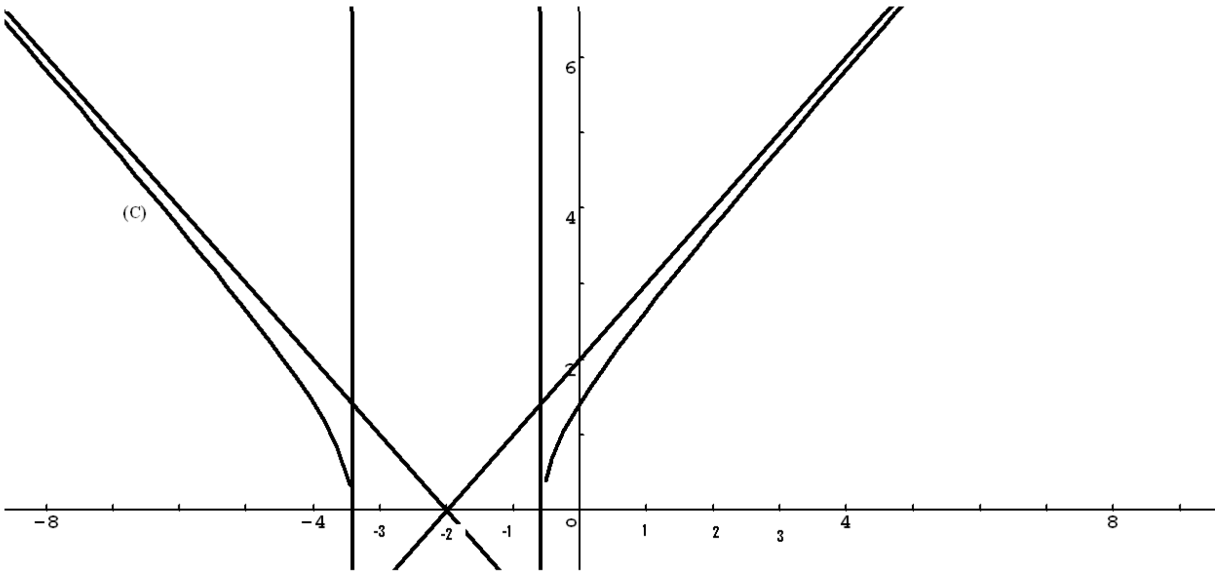
<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f '(x)		-	$(-\infty)$ ||		|| $(+\infty)$	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

*f est du signe positif. En effet, sur]- ∞ ; $-2-\sqrt{2}$], f(x) $\in$ [0 ; +∞[et sur [-2+$\sqrt{2}$; +∞[f(x) $\in$ [0 ; +∞[.

c) Construction de ©

Voir figure



d) Démonstration

Appelons O' le point de rencontre des deux asymptotes ; O'(-2 ;0) ; menons par ce point O' des axes parallèles aux anciens. On écrira alors une équation de (C) dans le repère

(O' ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Les formules de changements de coordonnées sont : $\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y \end{cases}$

(C) aura pour équation dans ce nouveau repère $Y=\sqrt{X^2-2}$; la fonction F(X) = $\sqrt{X^2-2}$ étant paire, (C) admet l'axe des ordonnées (O'y) comme axe de symétrie.

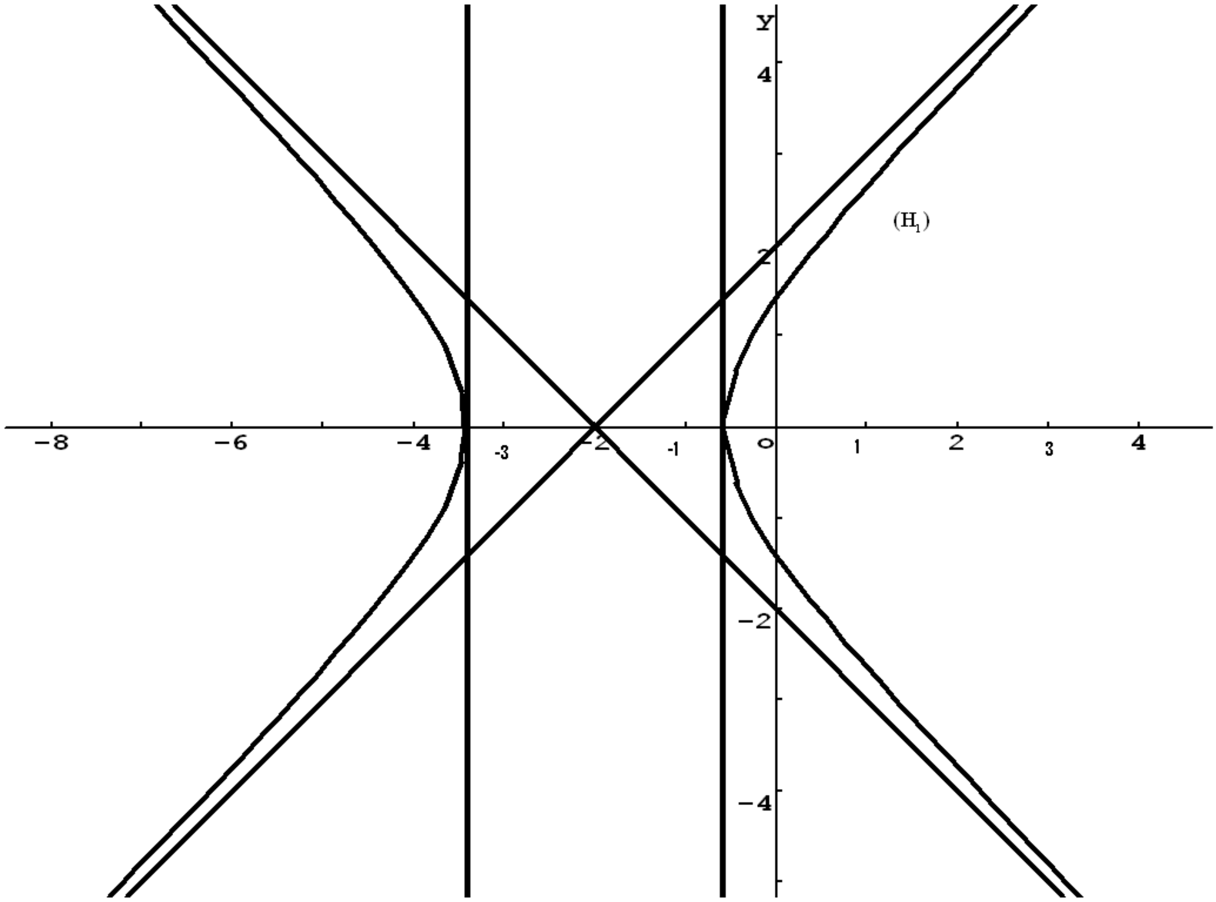
2) a) Démonstration

(H_1) : $y^2 = x^2 +4x+2$ $\Leftrightarrow$ (C) : y = f(x) = $\sqrt{x^2+4x+2}$ ou (C') : y = g(x) = - $\sqrt{x^2+4x+2}$

g(x) = - f(x). Donc (H_1)= (C) $\cup$ (C') ; (C) est la courbe de f et (C') celle de g telle que :

g(x) = -f(x). (C') se déduit donc de (C) par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox).

b) Construction de (H_1)



c) Démonstration

(H_1) admet l'axe (O'y) pour axe de symétrie. De plus (O'x) est aussi un axe de symétrie de (H_1) (construction). Donc O', point commun à ces deux axes de symétrie orthogonaux, est centre de symétrie pour (H_1).

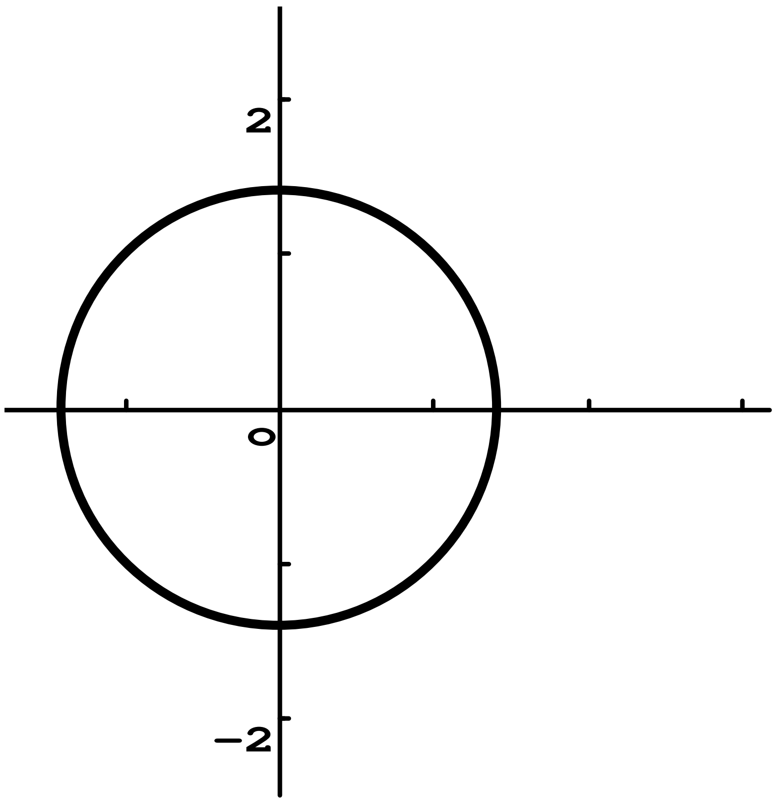
On peut aussi remarquer que (H_1) est une hyperbole équilatère.

B)

1. a) Nature de (H_{-1})

(H_{-1}) : $x^2 + y^2 = 2$; (H_{-1}) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b) Construction de (H_{-1})



2. $M_z(x,y) \mapsto M'(x',y')$ telle que: $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x+y+2) \end{cases}$

a) Détermination des coordonnées de I

I(x,y) point invariant $\Leftrightarrow$ S(I) =I $\Leftrightarrow$ x =1 et y = 1; d'où i(1;1).

b) Expression de z' en function de z

$$z'=x'+iy'=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}i(-x+y+2)$$

$$=\frac{1}{2}(1-i)(x+iy)+i$$

z' = $\frac{1}{2}(1\text{-}i)$ z +i

c) Nature et éléments caractéristiques de S

L'application complexe de S s'exprime sous la forme $z' = az+b$ avec $a = \frac{1}{2}(1\text{-}i)$ et $b = i$. Elle est donc une similitude plane direte. Son centre est le point invariant I ; son angle est $\arg[\frac{1}{2}(1\text{-}i)] = -\frac{\pi}{4}$ et son rapport $|\frac{1}{2}(1\text{-}i)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Détermination de l'image par S de (H_{-1})

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x+y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-y'+1 \\ y = x'+y'-1 \end{cases}$$

L'image par S de (H_{-1})

(H_{-1}) : $x^2+y^2=2$; $(H'_{-1}) = S[(H_{-1})]$: $(x'-y'+1)^2 + (x'+y'-1)^2 = 2$; d'où (H_{-1}') : $x'^2+(y-1)^2=1$

(H_{-1}') est le cercle de centre $\Omega(0\,;1)$ et de rayon 1

e) Equation de (H'_1) et nature de (H'_1)

(H_1) : $y^2 = x^2+4x+2$

(H'_1) : $(x'+y'-1)^2=(x'-y'+1)^2 +4(x'-y'+1)+2$

(H'_1) : $y' = \frac{4x'-3}{2x'+2}$ avec $x' \neq -1$

(H'_1) est une hyperbole équilatère d'asymptotes d'équations : $x' = -1$ et $y = 2$.

C)

1. a) Démonstration

(H_m) : $y^2 = mx^2 +2(m+1)x+2$

(H_m) : $y^2 = m(x^2 +2x)+2x+2$; cette égalité est vérifiée pour tout réel m si et seulement si :

$2x+2 - y^2 = 0$ et $x^2 +2x=0$; d'où $x = 0$ et $y = \sqrt{2}$ ou $x=0$ et $y= -\sqrt{2}$. On a alors $A(0\,; \sqrt{2})$ et $B(0\,; -\sqrt{2})$

b) Equations des tangentes

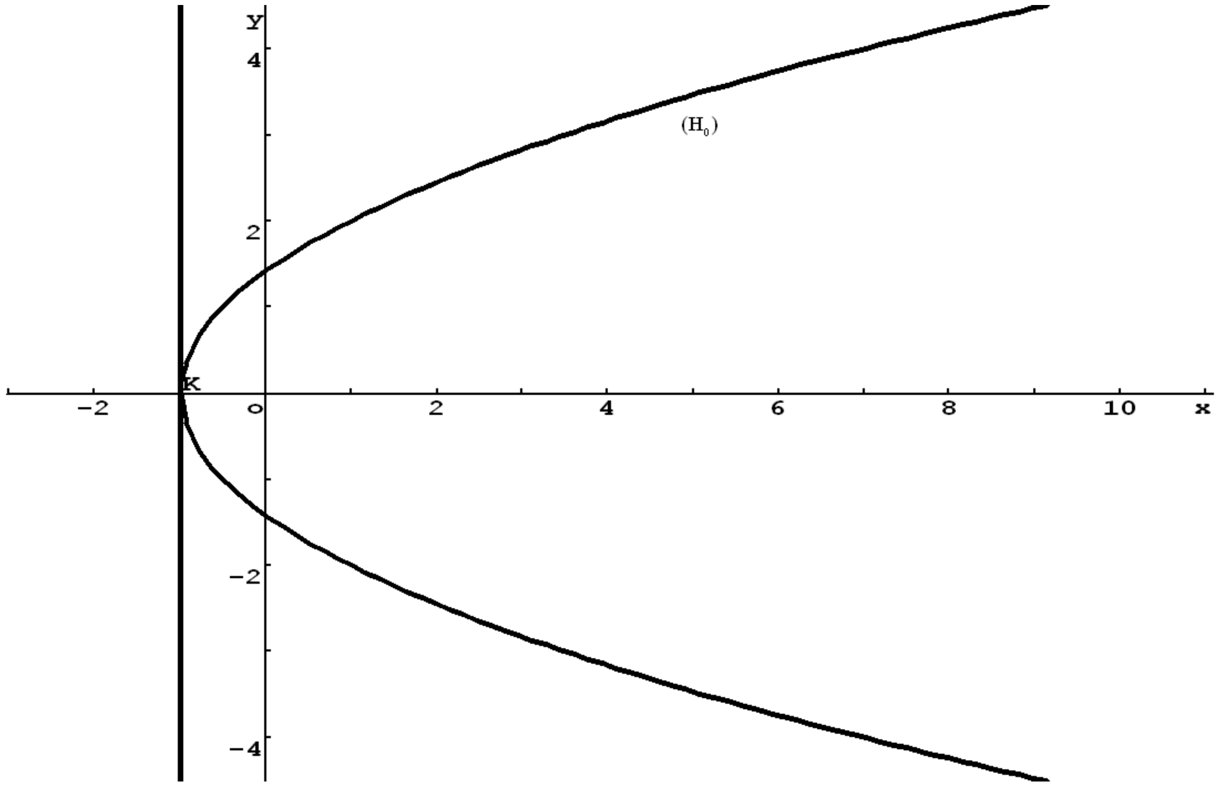
(H_m) : y= $f_1(x) = \sqrt{mx^2+2(m+1)x+2}$ ou y=$f_2(x)$ = - $\sqrt{mx^2+2(m+1)x+2}$

Au point d'abscisse A où $y_1>0$, on aura $f_1'(0) = \frac{m+1}{\sqrt{2}}$; au point d'abscisse B où $y_2<0$, on aura

$f_1'(0) = \frac{-m-1}{\sqrt{2}}$. (T_A) : y = $\frac{m+1}{\sqrt{2}}$x+$\sqrt{2}$; (T_B) : y= $\frac{-m-1}{\sqrt{2}}$x-$\sqrt{2}$

2. a) Construction de (H_0) voir figure

(H_0) : $y^2 = 2x+2$; (H_0) est une parabole de sommet K(-1 ;0) et d'axe focal (Ox).



b) Calcul de l'aire

Soit Δ l'aire considérée, on aura : $\Delta = 2\int_{-1}^{0}\sqrt{2x+2}dx$ u.a

$\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{2}u.a$; d'où $\Delta = \frac{16}{3}\sqrt{2}cm^2$

D)

1.Ensemble (Q_1)

(H_m) : $m\left(x-\frac{m+1}{2}\right)^2 - y^2 - \frac{(m+1)^2}{m} + 2 = 0$

En faisant un changement de coordonnées : $\begin{cases} X = x - \frac{m+1}{2} \\ Y = y \end{cases}$ et en prenant comme nouvelle origine $J(\frac{m+1}{2};0)$, on a : $\frac{X^2}{\frac{m^2+1}{m^2}} + \frac{Y^2}{\frac{m^2+1}{-m}} = 1$ et (H_m) est une ellipse si $m < 0$; donc $Q_1 =]-\infty ; 0[$.

2. Expression de la longueur des axes de l'ellipse et précision du grand et du petit axe suivant les valeurs de m de (Q_1)

On aura $a^2 = \frac{m^2+1}{m^2}$ et $b^2 = \frac{m^2+1}{-m}$

Si $-1 < m < 0$ a^2 plus grand que b^2 et e grand axe est (Ox)

Si $-\infty < m < -1$, b^2 plus grand que a^2 et le grand axe est Oy)

Si $m = -1$, (H_m) est un cercle.

TABLE DES MATIERES

Titres **Pages**

Interdit de vendre