Travaux Dirigée sur Les Fonctions

Problème N° 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$

Partie A : Étude de fonctions auxiliaires

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x + 1$.
   Étudier le sens de variation de h et démontrer que $h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.
   - **a.** Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   - **b.** Étudier le sens de variation de g et dresser le tableau des variations de g.
   - **c.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
     On note α et β ces solutions, avec $\alpha > \beta$. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$
   - **d.** En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction f et tracé de la courbe $(\mathcal{C})$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$
   - **b.** En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.
3. **a.** Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$
   - **b.** En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A)2°), déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5. **a.** Etablir que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$
   $$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1$$
   - **b.** Étudier le sens de variation de la fonction u.
     En déduire le signe de $u(x)$.
   - **c.** Déduire des questions précédentes la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).
6. Tracer $(\mathcal{C})$ et (T).
   On prendra pour unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.
   On pourra admettre que $-1,85 < \beta < -1,84$ et $-1,19 < f(\beta) < -1,18$.

Problème N° 2

La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 + \ln x}{x}$

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II.

La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer, sur $]0;+\infty[$, la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.
   Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on déterminera.
3. Étudier le sens de variation de f.
   Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ).
   Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.
   Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$.
6. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T).

Partie III :

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. **a.** Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

   b. Montrer que (x_n) est une suite croissante.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = 4\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} (f(x) - \frac{x}{2})dx$

   a. Donner une interprétation géométrique de a_n.

   b. Montrer que $a_n = \dfrac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n.
   En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

Problème N° 3

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer la fonction f' dérivée de f et étudier le signe de f'.
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Montrer qu'il existe un triplet de réels $(a\,;\,b\,;\,c)$, que l'on déterminera, tel que pour tout réel x : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{3x^2+1}$
   Étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) d'équation $y = x - 3$.
   Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x-3) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = 0$
   Interpréter graphiquement ces limites.
6. Tracer (D), (T) et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{3(\sin x - 1)^3}{3\sin^2 x + 1}$

1. Montrer que g est périodique de période 2π.
2. Calculer $g'(x)$ et justifier que pour tout réel x : $g'(x) = \cos x \times f'(\sin x)$.
3. Dresser le tableau des variations de g sur $[-\pi; \pi]$.
4. Tracer, sur un nouveau dessin, la courbe représentative de g.

Problème N° 4

Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-x}\,; \quad g(x) = f(x) + [f(x)]^2$$

Partie A- Etude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   Étudier le sens de variation de f.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

   c. Donner le tableau de variation de f.
   (On ne demande pas de construire la représentation graphique de f).
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution notée α.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   b. Montrer de même que l'équation $f(x) = -1$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution notée β. Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Partie B- Etude de la fonction g

1. Justifier que $g'(x) = f'(x)[1 + 2f(x)]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Étudier le sens de variation de g.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.
3. Donner le tableau de variation de g. On calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$.
4. **a.** Établir que, pour tout réel x, on a : $\quad g(x) - x = xe^{-x}[1 + xe^{-x} - e^x]$

   b. Montrer que, pour tout x réel, on a : $\quad 1 + xe^{-x} \leq 1 + x \leq e^x$

c. Préciser la position de la courbe Γ représentative de la fonction g par rapport à sa tangente T en O.

5. Tracer Γ (on prendra pour unité graphique 2 cm). Préciser les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Faire figurer sur le dessin la tangente T.

Problème N° 5

Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$. On nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).
Le but de l'exercice est d'étudier cette fonction.

Partie A : Etude de la fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α et telle que $2,10 < \alpha < 2,11$
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B : Etude de la fonction f

1. Étudiez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que $f'(x) = g(x)xh(x)$ où h est une fonction à préciser
   En déduire, à l'aide de la partie A, le tableau de variation de la fonction f.
3. a. Vérifiez que pour tout $x \in D$, $f(x) = 2x + \dfrac{2x + 3}{x^2 - 1}$
   b. En déduire que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f.
   c. Étudiez la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote .
   Précisez en particulier les coordonnées du point d'intersection de d et $\mathcal{C}$.
4. $\mathcal{C}$ admet-elle d'autres asymptotes ? Si oui les préciser.
5. Tracez la courbe et ses asymptotes.

Problème N° 6

Partie A :
Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0.
2. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans]0 ;1[.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}
4. Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :
Soit la fonction f définie par $f(x) = x + (\ln x)^2$

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire le sens de variation de f

2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et à droite en 0.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$, puis la limite en $+\infty$ de $(f(x) - x)$. Interpréter
5. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$. On choisit pour unité graphique 1 cm.
   a. Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = x$.
      Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ de f par rapport à $(\mathcal{D})$
   b. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$. Montrer que h est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer et construire dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ la courbe de h^{-1}.
7. Déterminer la primitive G de la fonction g sur $]0; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en e.