CHAPITRE 3	LE THÉORÈME DE THALÈS ET SA RÉCIPROQUE

Objectifs :

• Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi- droites de même origine.

• *Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes.*

• *Connaître et utiliser un énoncé réciproque.*

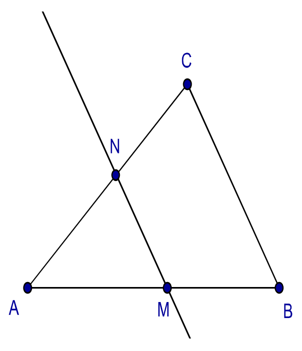
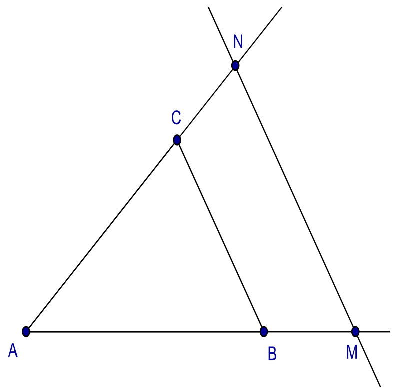
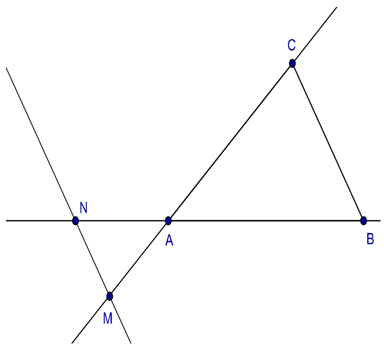
1. Le théorème de Thalès

Soit deux droites (AB) et (AC) sécantes en A ; soit M un point de la droite (AB) ; soit N un point de la droite (AC).

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors les triangles *AMN* et *ABC* ont leurs côtés associés proportionnels.

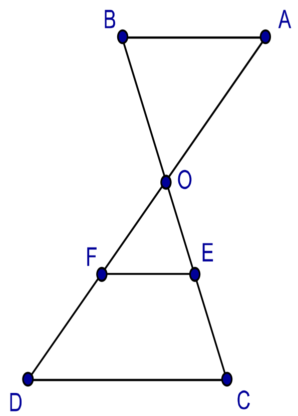
D'où : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

On distingue 3 cas de figure : on les appelle « configurations de Thalès ».

$M \in [AB]$	$M \in (AB)$ mais $M \notin [AB]$	« nœud papillon »
		

Remarque : Les dimensions du triangle *AMN* sont **proportionnelles** aux dimensions du triangle *ABC* ; le coefficient de proportionnalité est $\dfrac{AM}{AB}$ ou $\dfrac{AN}{AC}$ ou $\dfrac{MN}{BC}$.

Exemple :



Sur la figure ci-contre :
$(BA)/\!/(FE)/\!/(DC)$
$BO = 2$; $OC = 5$; $FE = 4$; $DC = 6$.
Calculer OE et BA (donner une valeur exacte et éventuellement une valeur approchée à 10^{-2} près).

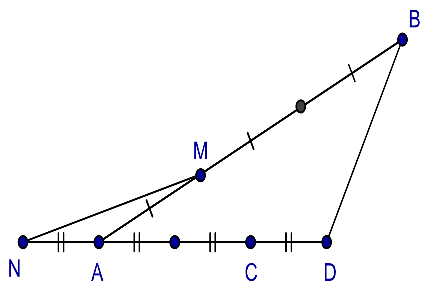
• Dans le triangle OCD, E est un point de $[OC]$, F est un point de $[OD]$ et (FE) et (DC) sont parallèles ; d'après le théorème de Thalès, $\frac{OE}{OC} = \frac{OF}{OD} = \frac{EF}{CD}$. Par suite, $\frac{OE}{5} = \frac{OF}{OD} = \frac{4}{6}$.
Alors $\frac{OE}{5} = \frac{4}{6}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{OE} = \frac{4}{6} \times 5 = \frac{20}{6} = \mathbf{\frac{10}{3}} \approx \mathbf{3{,}33}$.

• Les droites (BC) et (DA) sont sécantes en O, les droites (BA) et (DC) sont parallèles ; d'après le théorème de Thalès, $\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD} = \frac{BA}{CD}$. Par suite, $\frac{2}{5} = \frac{OA}{OD} = \frac{BA}{6}$.
Alors $\frac{2}{5} = \frac{BA}{6}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{BA} = \frac{2}{5} \times 6 = \mathbf{\frac{12}{5}} \approx \mathbf{2{,}4}$.

2. La « réciproque » du théorème de Thalès

Soit deux droites (AB) et (AC) sécantes en A ; soit M un point de la droite (AB) ; soit N un point de la droite (AC).
Si les points A, B, M, d'une part, et les points A, C, N, d'autre part, sont dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles

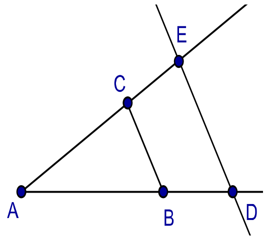
Remarque : L'hypothèse « **dans le même ordre** » est importante ainsi qu'en témoigne le contre-exemple ci-dessous.



C. Lainé

On a bien : $M \in (AB)$; $N \in (AC)$; $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3}$; mais les droites (MN) et (AB) ne sont pas parallèles. En effet, $M \in [AB]$, mais $N \notin [AC]$, donc les points A, B, M, d'une part, et les points A, C, N, d'autre part, ne sont pas dans le même ordre.

Exemple 1 :

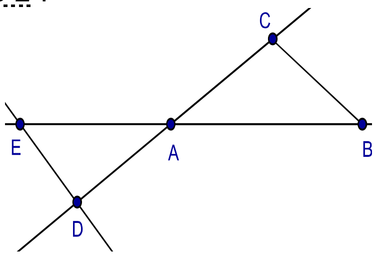


Sur la figure ci-contre :
$AB = 12$; $AD = 14$; $AC = 18$; $CE = 3$.

Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?

Les points A, B, D et les points A, C et E sont alignés dans le même ordre.
De plus : $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{12}{14} = \dfrac{6 \times \cancel{2}}{7 \times \cancel{2}} = \dfrac{6}{7}$ et $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{18}{18+3} = \dfrac{18}{21} = \dfrac{6 \times \cancel{3}}{7 \times \cancel{3}} = \dfrac{6}{7}$. Par suite, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.
On en déduit, d'après la réciproque du théorème de Thalès, que **les droites (BC) et (DE) sont parallèles**.

Exemple 2 :



Sur la figure ci-contre :
$AE = 2{,}1$; $AD = 5$; $AC = 13{,}5$; $AB = 5{,}6$.

Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?

Les points A, B, D et les points A, C et E sont alignés dans le même ordre.
De plus : $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{13{,}5}{5} = 2{,}7$ et $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{5{,}6}{2{,}1} = \dfrac{56}{21} = \dfrac{8 \times \cancel{7}}{3 \times \cancel{7}} = \dfrac{8}{3} \approx 2{,}67$. Par suite, $\dfrac{AC}{AD} \neq \dfrac{AB}{AE}$.
On en déduit que **les droites (BC) et (DE) sont parallèles**.