TD d'exercices de Géométrie dans l'espace.

Exercice 1. (Brevet 2006)

Pour la pyramide SABCD ci-contre :

La base est le rectangle ABCD de centre O.
AB = 3 cm et BD = 5cm.
La hauteur [SO] mesure 6 cm.

1) Montrer que AD = 4 cm.

2) Calculer le volume de la pyramide SABCD en cm^3.

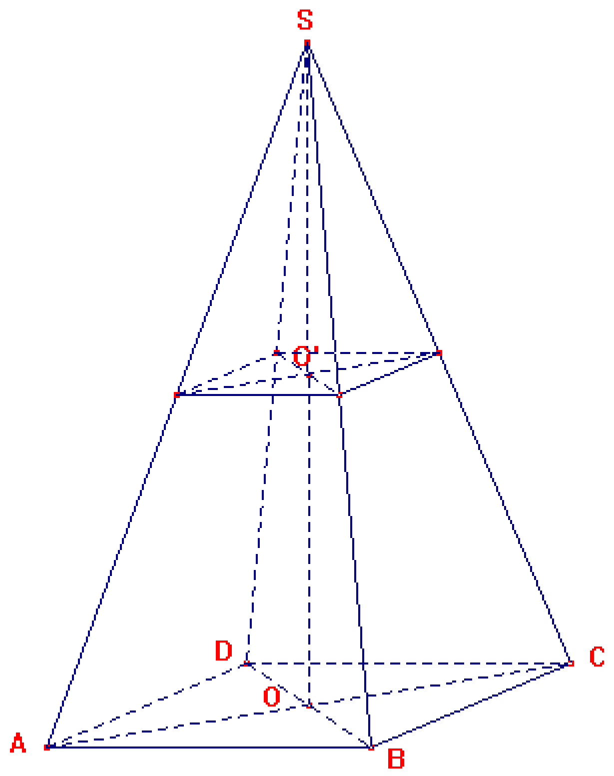
3) Soit O' le milieu de [SO].

On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base.

a) Quelle est la nature de la section A'B'C'D' obtenue ?

b) La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD. Donner le rapport de cette réduction.

c) Calculer le volume de la pyramide SA'B'C'D'.



Exercice 2. (Brevet 2006)

Problème

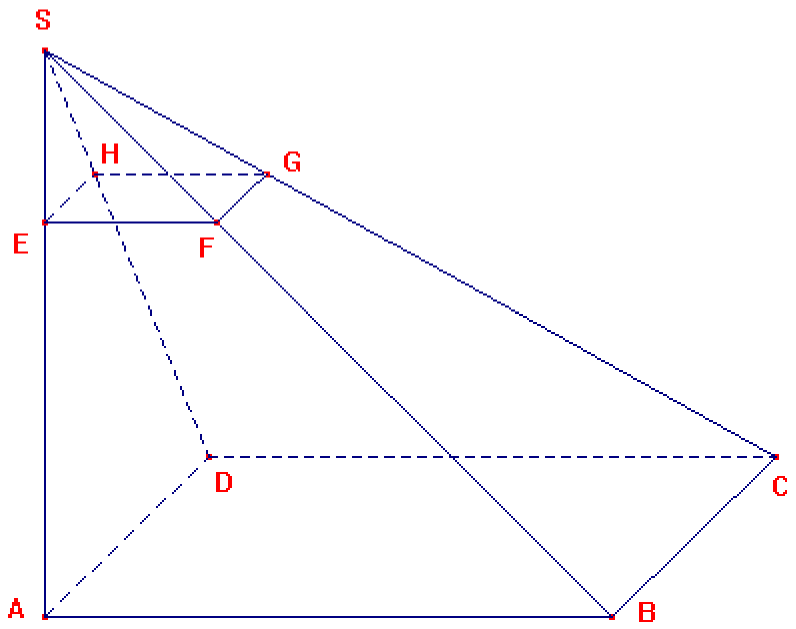
Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide à base carrée de hauteur [SA] telle que AB = 9 cm et SA = 12 cm.
Le triangle SAB est rectangle en A.

Partie A

EFGH est la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base et telle que SE = 3 cm

1) *a*) Calculer EF.
b) Calculer SB.

2) *a*) Calculer le volume de la pyramide SABCD.
b) Donner le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SEFGH.
c) En déduire le volume de SEFGH. On



donnera une valeur arrondie à l'unité.

Partie B

Soit M un point de [SA] tel que SM = x cm, où x est compris entre 0 et 12.

On appelle MNPQ la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base passant par M.

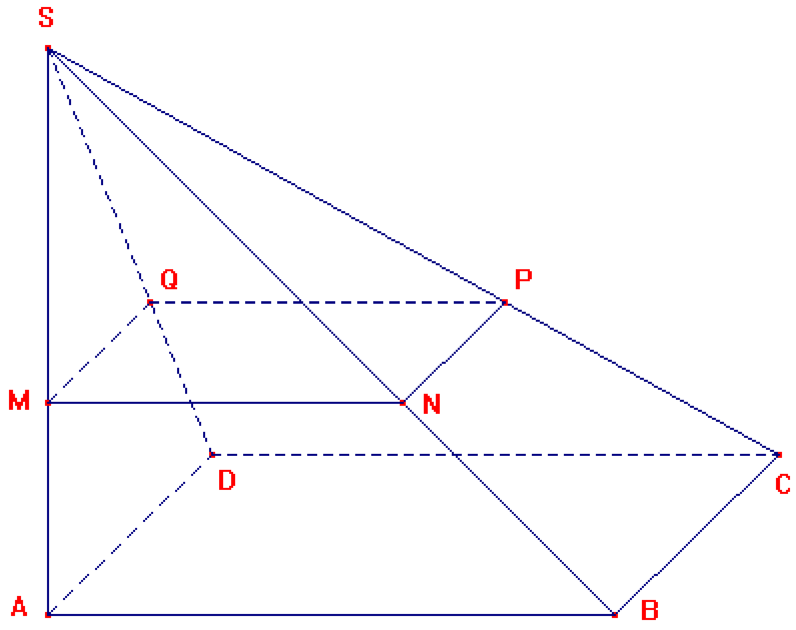
1) Montrer que MN = 0,75 x.

2) Soit $A(x)$ l'aire du carré MNPQ en fonction de x. Montrer que $A(x) = 0,5625\ x^2$.

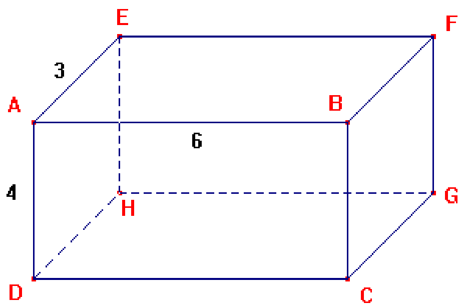
3) Compléter le tableau suivant.

4) Placer dans un repère sur papier millimétré (1cm = 1 unité en abscisses, 1 cm = 10 unités en ordonnées) les points d'abscisse x et d'ordonnée $A(x)$ données par le tableau.

5) L'aire de MNPQ est-elle proportionnelle à la longueur SM? Justifier à l'aide du graphique.



Exercice 3. (Brevet 2005)



ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. On donne AE = 3 m ; AD = 4 m ; AB = 6 m.

1) *a*) Que peut-on dire des droites (AE) et (AB) ? Le justifier,

b) Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes ?

2) *a*) Calculer EG. On donnera la valeur exacte.

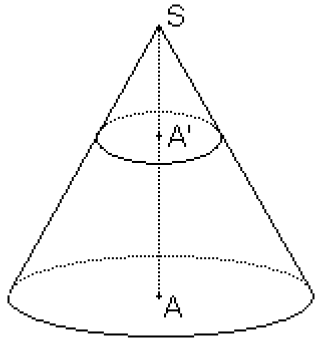
b) En considérant le triangle EGC rectangle en G, calculer la valeur exacte de la longueur de diagonale [EC] de ce parallélépipède rectangle.

3) Montrer que le volume de ABCDEFGH est égal à 72 m^3.

4) Montrer que l'aire totale de ABCDEFGH est égale à 108 m^2 .

Exercice 4. (Brevet 2005)

Sur la figure ci-contre on a un cône de révolution tel que SA = 12 cm. Un plan parallèle à la base coupe ce cône tel que SA' = 3 cm (la figure ci-contre n'est pas à l'échelle).



1) Le rayon du disque de base du grand cône est de 7 cm. Calculer la valeur exacte du volume du grand cône.

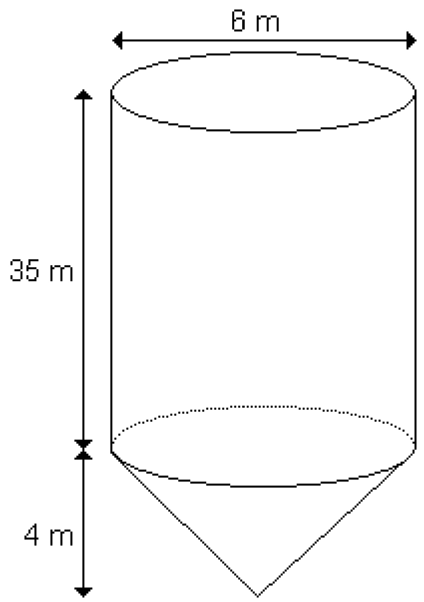
2) Quel est le coefficient de réduction qui permet de passer du grand cône au petit cône ?

3) Calculer la valeur exacte du volume de ce petit cône, puis en donner la valeur arrondie au cm^3.

Exercice 5. (Brevet 2005)

On s'intéresse dans cet exercice au réservoir de la fusée XYZ2005, nouveau prototype de fusée interplanétaire.

Ce réservoir est constitué d'un cône surmonté d'un cylindre, comme le montre le dessin ci-contre.



Le diamètre du réservoir est de 6 m , le cylindre mesure 35 m de hauteur et le cône 4 m de hauteur.

1. Calculer le volume total du réservoir ; on donnera d'abord la valeur exacte en m^3, puis la valeur en dm^3, arrondie au dm^3.

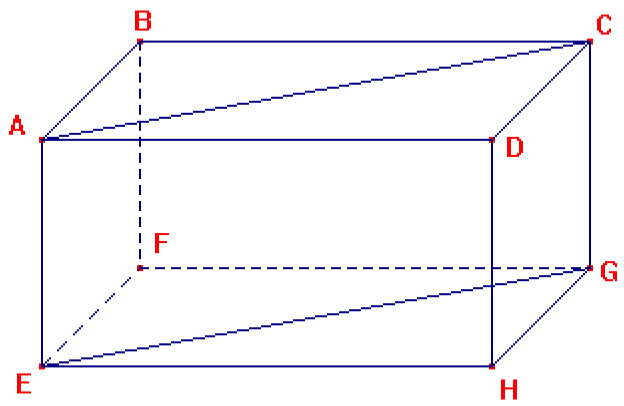
2. Le volume de ce réservoir est-t-il suffisant pour que les moteurs de la fusée fonctionnent pendant 10 minutes, sachant que ces moteurs consomment 1500 litres de carburant par seconde ?

Rappels : Volume d'un cône de hauteur h et de rayon de base R :
$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$$

Volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon de base R :
$$V = \pi \times R^2 \times h$$

Exercice 6. (Brevet 2004)

On considère le pavé droit ABCDEFGH représenté ci-dessous:

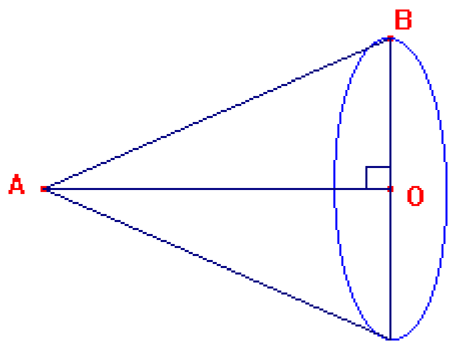


Observer la figure et compléter le tableau. Sans justification.

OBJET	NATURE DE L'OBJET
Triangle ABC	
Angle $\widehat{ABF}$	
Quadrilatère ABFE	
Angle $\widehat{ACG}$	
Quadrilatère ACGE	

Exercice 7. (Brevet 2004)

On considère un cône de révolution semblable à celui qui est représenté ci-contre avec :



AO = 2 cm et BO = 3 cm.

1. Calculer la longueur de la génératrice [AB] :
donner en cm la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

2. Calculer le volume du cône :
donner en cm^3 la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité.

CORRECTION TD d'exercices de Géométrie dans l'espace.

Correction de l'Exercice 1. (Brevet 2006)

1) Montrer que AD = 4 cm.

ABCD étant un rectangle, le triangle ABD est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AB^2 + AD^2$.

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm.}$$

2) Calculer le volume de la pyramide SABCD en cm^3.

$$V_{SABCD} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{(AB \times AD) \times SO}{3} = \frac{3 \times 4 \times 6}{3} = 24 \text{ cm}^3$$

3) *a*) Quelle est la nature de la section A'B'C'D' obtenue ?

Une section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est de même nature que la base, A'B'C'D' est donc un rectangle.

b) La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD. Donner le rapport de cette réduction.

Le rapport de réduction est $\frac{SO'}{SO}$ qui vaut $\frac{1}{2}$ puisque O' est le milieu de [SO].

c) Calculer le volume de la pyramide SA'B'C'D'.

Le rapport des volumes est le cube du rapport de réduction donc

$$V_{SA'B'C'D'} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V_{SABCD} = \frac{1}{8} \times 24 = \frac{24}{8} = 3 \text{ cm}^3.$$

Correction de l'Exercice 2. (Brevet 2006)

Partie A

1) *a*) Calculer EF.

(EF) et (AB) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles SAB et SEF, nous avons :

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = \frac{EF}{AB} \text{ donc } EF = \frac{SE \times AB}{SA} = \frac{3 \times 9}{12} = 2{,}25$$

b) Calculer SB.

Le triangle rectangle SAB étant rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore nous avons :

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 221 \;;\; SB = \sqrt{225} = 15$$

2) *a*) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

$$V_{SABCD} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3} = \frac{AB^2 \times SA}{3} = \frac{9^2 \times 12}{3} = \frac{972}{3} = 324 \text{ cm}^3$$

b) Donner le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SEFGH.

Le coefficient de réduction est de $\frac{SE}{SA} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

<u>c) En déduire le volume de SEFGH. On donnera une valeur arrondie à l'unité.</u>

Le rapport des volumes est le cube du rapport de réduction :

$$V_{SEFGH} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 V_{SABCD} = \frac{1}{64} \times 324 = 5{,}0625 \approx 5 \text{ cm}^3$$

Partie B

<u>1) Montrer que MN = 0,75 x.</u>

(MN) et (AB) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles SAB et SMN, nous avons :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} \text{ donc } MN = \frac{AB \times SM}{SA} = \frac{9 \times x}{12} = 0{,}75\ x$$

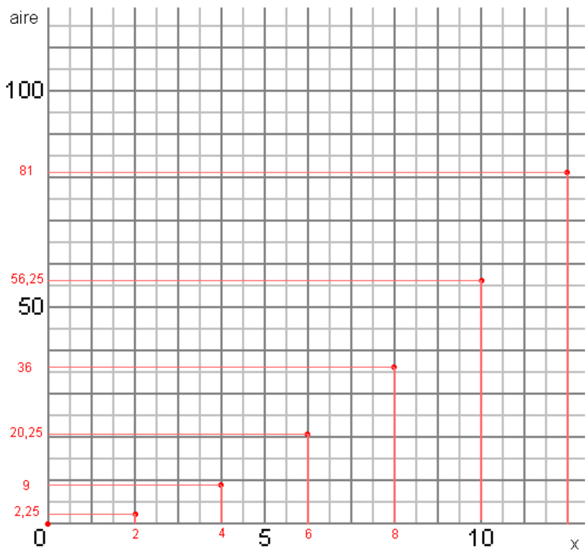
<u>2) Soit *A*(*x*) l'aire du carré MNPQ en fonction de x. Montrer que *A*(*x*) = 0,5625 x^2.</u>

$A(x) = MN^2 = (0{,}75\ x)^2 = 0{,}5625\ x^2$

<u>3) Compléter le tableau suivant.</u>

x : longueur SM en cm	0	2	4	6	8	10	12
A(*x*) : aire du carré MNPQ	0	2,25	9	20,25	36	56,25	81

<u>4) Placer dans un repère sur papier millimétré (1cm = 1 unité en abscisses, 1 cm = 10 unités en ordonnées) les points d'abscisse *x* et d'ordonnée *A*(*x*) données par le tableau.</u> (voir ci-contre)



<u>5) L'aire de MNPQ est-elle proportionnelle à la longueur SM? Justifier à l'aide du graphique.</u>

L'aire n'est pas proportionnelle à la longueur SM car si c'était le cas, les points formeraient une droite.

Correction de l'Exercice 3. (Brevet 2005)

1) *a*) Que peut-on dire des droites (AE) et (AB) ? Le justifier,

(AE) et (AB) sont perpendiculaires car le quadrilatère ABFE est un rectangle.

b) Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes ?

(EH) et (AB) ne sont pas dans un même plan, elles ne sont pas sécantes.

2) *a*) Calculer EG. On donnera la valeur exacte.

Le triangle EHG est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore $EG^2 = EH^2 + HG^2$.

EH = AD = 4, HG = AB = 6 ; donc $EH^2 + HG^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$; EG2 = 52 ;
$EG = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.

b) En considérant le triangle EGC rectangle en G, calculer la valeur exacte de la longueur de diagonale [EC] de ce parallélépipède rectangle.

Le triangle EGC est rectangle en G donc $EC^2 = EG^2 + GC^2 = 52 + 3^2 = 52 + 9 = 61$; $EC = \sqrt{61}$.

3) Montrer que le volume de ABCDEFGH est égal à 72 m^3.

Volume = AE *x* AB *x* AD = 4 *x* 3 *x* 6 = 72 m^3.

4) Montrer que l'aire totale de ABCDEFGH est égale à 108 m^2 .

Aire = 2 (4 *x* 3 + 4 *x* 6 + 3 *x* 6) = 2 (12 + 24 + 18) = 2 *x* 54 = 108 m^2.

Correction de l'Exercice 4. (Brevet 2005)

1) Le rayon du disque de base du grand cône est de 7 cm. Calculer la valeur exacte du volume du grand cône.

$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de Base} \times \text{Hauteur}}{3} = \frac{\pi \times 7^2 \times 12}{3} = \frac{588\,\pi}{3} = 196\,\pi\ \text{cm}^3$$

2) Quel est le coefficient de réduction qui permet de passer du grand cône au petit cône ?

Le coefficient de réduction est $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

3) Calculer la valeur exacte du volume de ce petit cône, puis en donner la valeur arrondie au cm^3.

Le volume est obtenu à partir du grand cône en multipliant par le cube du rapport de réduction soit $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

$$\text{Volume} = \frac{196\,\pi}{64} = \frac{49\,\pi}{16} \approx 9{,}621 \text{ soit } 10\ \text{cm}^3 \text{ au cm}^3 \text{ près.}$$

Correction de l'Exercice 5. (Brevet 2005)

1. Calculer le volume total du réservoir ; on donnera d'abord la valeur exacte en m^3, puis la valeur en dm^3, arrondie au dm^3.

Le volume de la partie conique est de :

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\,\pi\ \text{m}^3$$

Le volume de la partie cylindrique est de :

$$V_2 = \pi \times 3^2 \times 35 = 315\,\pi\ \text{m}^3$$

Le volume total est donc de :

$$327\,\pi\ \text{m}^3 \text{ soit environ } 1\,027{,}3\ \text{m}^3 \text{ ou } 1\,027\,300\ \text{dm}^3$$

2. Le volume de ce réservoir est-t-il suffisant pour que les moteurs de la fusée fonctionnent pendant 10 minutes, sachant que ces moteurs consomment 1500 litres de carburant par seconde ?

En consommant 1500 litres par seconde, le moteur pourra fonctionner pendant : 1 027 300 : 1 500 = 685 secondes.

10 minutes correspondent à 600 secondes, **le moteur fonctionnera assez longtemps**.

Correction de l'Exercice 6. (Brevet 2004)

OBJET	NATURE DE L'OBJET
Triangle ABC	Le triangle ABC est rectangle
Angle $\widehat{ABF}$	L'angle $\widehat{ABF}$ est droit
Quadrilatère ABFE	Le quadrilatère ABFE est un rectangle
Angle $\widehat{ACG}$	L'angle $\widehat{ACG}$ est droit
Quadrilatère ACGE	Le quadrilatère ACGE est un rectangle

Correction de l'Exercice 7. (Brevet 2004)

1. Calculer la longueur de la génératrice [AB] : donner en cm la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

Le triangle AOB étant rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore nous avons :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$AB = \sqrt{13} \approx 3{,}605$; AB mesure 3,6 cm au dixième près.

2. Calculer le volume du cône : donner en cm^3 la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité.

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times OB^2 \times OA}{3} = \frac{9 \times 2\,\pi}{3} = 6\,\pi \approx 18{,}849\ \text{cm}^3$$

Le volume du cône est de 19 cm^3 à l'unité près.