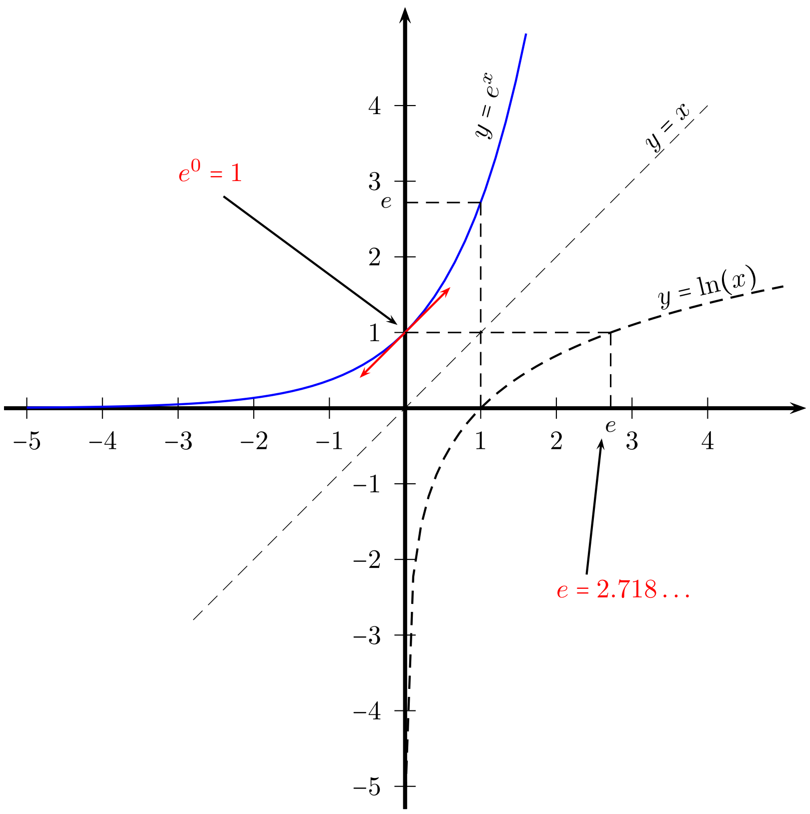
La fonction exponentielle

Définition de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x,\ f'(x) = f(x).$$

Propriétés analytiques



- La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ (\exp)'(x) = \exp(x).}$
- La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ e^x > 0.}$
- Limites aux bornes du domaine :
  $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty.}$
- Théorèmes de croissances comparées :
  $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0.}$
- Nombre dérivé en 0 :
  $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.}$

Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y, $e^{x+y} = e^x \times e^y$.	Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.
Pour tout réel x, $e^x \neq 0$ et $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.	Pour tout réel x, $e^x \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
Pour tous réels x et y, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.	Pour tous réels x et y, $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.
Pour tout réel x et tout entier relatif n, $(e^x)^n = e^{nx}$.	Pour tout réel x et tout entier relatif n, $e^{nx} = (e^x)^n$.

Liens avec le logarithme népérien

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \ln(e^x) = x. \quad \text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } e^{\ln(x)} = x.}$$

Résolution d'équations et d'inéquations

Si $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a une solution et une seule. Si $a \leqslant 0$, l'équation $e^x = a$ n'a pas de solution.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ (e^x = e^y \Leftrightarrow x = y). \quad \text{Pour tout réel } x \text{ et tout réel strictement positif } a,\ e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a).}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ (e^x < e^y \Leftrightarrow x < y). \quad \text{Pour tout réel } x \text{ et tout réel strictement positif } a,\ e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a).}$$