

Propriétés de Pythagore

	Propriété directe	Propriété réciproque	Propriété contraposée (raisonnement par l'absurde)
Conditions d'application	On a un triangle rectangle.	On a établi l'égalité suivante : le carré d'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.	On a établi que le carré du plus grand côté n'était pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
Objectif	On veut, en général, calculer la longueur du troisième côté d'un triangle rectangle.	On veut savoir si un triangle est rectangle (on va démontrer qu'il l'est effectivement).	On veut savoir si un triangle est rectangle (on va démontrer qu'il ne l'est pas).
Conclusion obtenue	Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.	Le triangle est rectangle (et son plus grand côté est son hypoténuse).	Le triangle n'est pas rectangle.
Exemple d'exercice	<u>Données de l'énoncé</u> <i>ABC</i> est un triangle rectangle en <i>A</i> ; <i>AB</i> = 3 cm ; <i>BC</i> = 7 cm . <u>Question posée</u> Calculer la valeur exacte de <i>AC</i> .	<u>Données de l'énoncé</u> <i>ABC</i> est un triangle ; <i>AB</i> = 3 cm ; <i>BC</i> = 4 cm ; <i>CA</i> = 5 cm . <u>Question posée</u> Démontrer que le triangle <i>ABC</i> est rectangle.	<u>Données de l'énoncé</u> <i>ABC</i> est un triangle ; <i>AB</i> = 4 cm ; <i>BC</i> = 9 cm ; <i>CA</i> = 6 cm . <u>Question posée</u> Le triangle <i>ABC</i> est-il rectangle ?
Rédaction de la solution	<u>Calcul de <i>AC</i></u> Dans le triangle <i>ABC</i> , rectangle en <i>A</i> , on utilise la propriété de Pythagore : $BC^2 = BA^2 + AC^2$ Donc : $AC^2 = BC^2 - BA^2$ $AC^2 = 49 - 9$ D'où : <u>$AC = \sqrt{40}$ cm</u>	<u><i>ABC</i> rectangle</u> On calcule : $CA^2 = 25$ et : $AB^2 + BC^2 = 9 + 16 = 25$ Donc : $CA^2 = AB^2 + BC^2$ On peut donc utiliser la propriété réciproque de Pythagore et en déduire que : <u><i>ABC</i> est rectangle en <i>B</i>.</u>	<u><i>ABC</i> rectangle ?</u> On calcule : $BC^2 = 81$ et : $AB^2 + AC^2 = 16 + 36 = 52$ Donc : $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ Si le triangle <i>ABC</i> était rectangle, alors son hypoténuse serait <i>BC</i> car c'est le plus grand côté ; on pourrait alors utiliser la propriété de Pythagore et on aurait : $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Or, cette égalité est fausse. On en déduit donc que : <u>le triangle <i>ABC</i> n'est pas rectangle.</u>