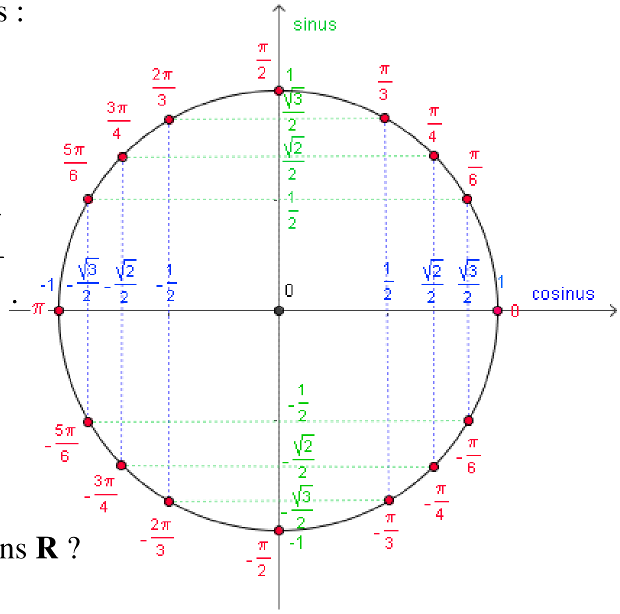
NOMBRES COMPLEXES (II)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

O. Équations trigonométriques



Exercice 1 : Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, les équations suivantes :

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 :

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, le système d'équations $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Exercice 3 :

Le système d'équations $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ a-t-il des solutions dans **R** ?

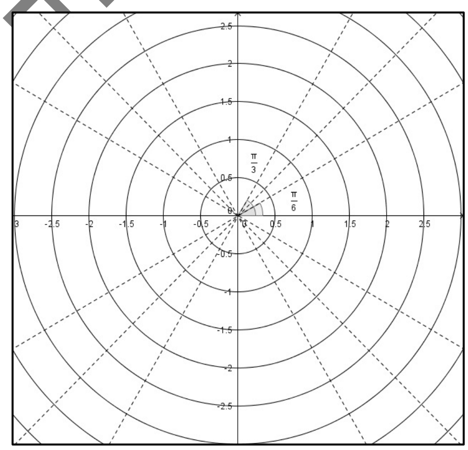
I. Module et arguments

Exercice 4 : Placer dans la figure ci-contre les points suivants :

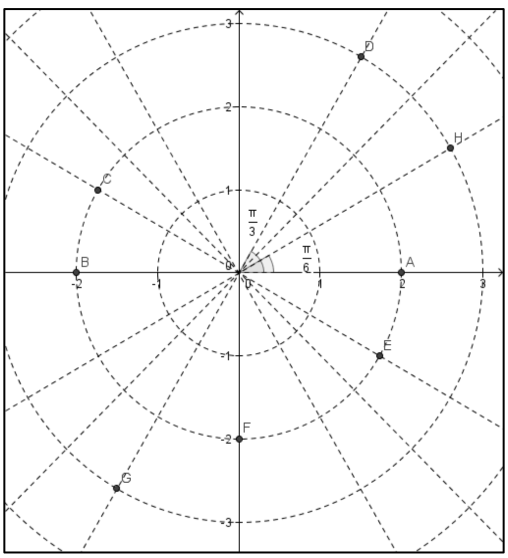
A d'affixe a tel que $|a| = 2$ et $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$;

B d'affixe b tel que $|b| = \dfrac{3}{2}$ et $\arg(b) = -\dfrac{\pi}{4}$;

C d'affixe c tel que $|c| = 2{,}5$ et $\arg(c) = \dfrac{4\pi}{3}$.

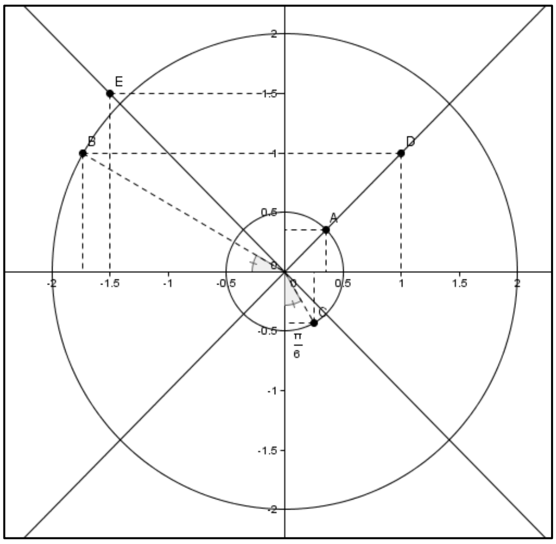


Exercice 5 :



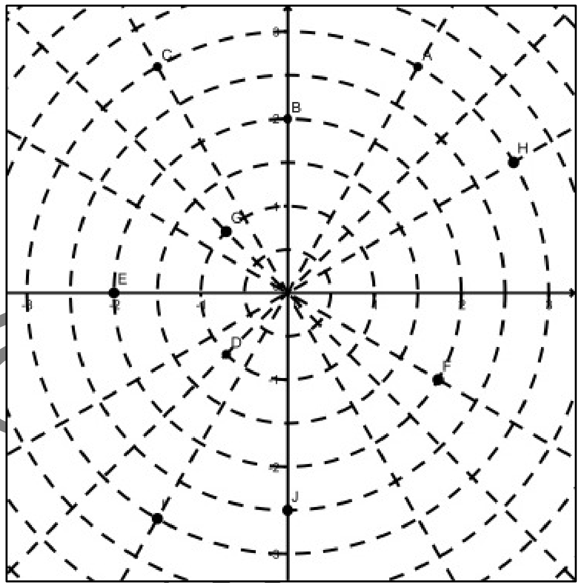
On a placé dans la figure ci-contre, les points A, B, C, D, E, F, G et H d'affixes respectives a, b, c, d, e, f, g et h. Lire le module et donner un argument pour chacune de ces affixes.

Exercice 6 :
Dans la figure ci-contre, déterminer le module et un argument des affixes des points A, B, C, D et E.



Exercice 7 :
On donne la figure ci-dessous. Compléter le tableau suivant par « vrai » ou « faux » en donnant le cas échéant les bonnes valeurs des modules ou arguments.

Point	Module	Argument	Vrai-Faux ?
A	3	$\frac{\pi}{6}$	
B	2	$\frac{13\pi}{2}$	
C	2,5	$\frac{2\pi}{3}$	
D	-1	$\frac{\pi}{4}$	
E	2	$-\pi$	
F	2	$\frac{11\pi}{6}$	
G	1	$-\frac{21\pi}{4}$	
H	-3	$-\frac{11\pi}{6}$	
I	2	$\frac{10\pi}{3}$	
J	2,5	$\frac{\pi}{2}$	



Exercice 8 : Indiquer le module et un argument des nombres suivants :

a) $2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ b) $2i$ c) $-3i$ d) 1 e) -2

Exercice 9 : Déterminer le module et un argument des nombres complexes $a=1+i\sqrt{3}$, $b=1-i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=\sqrt{3}-i$.

Exercice 10 :
Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=-1+i$ $z_2=i$ $z_3=-2$ $z_4=2-2i\sqrt{3}$ $z_5=1+\frac{1}{i}$.

Exercice 11 : Déterminer le module et un argument de $z=\frac{1-\sqrt{3}}{2}(i-1)$.

Exercice 12 : Soient $z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ et $z_2=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ deux complexes conjugués. Donner le module et un argument de chacun d'eux.

II. D'une forme à l'autre

Exercice 13 : Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$5-5i\ ,\ -1+i\sqrt{3}\ ,\ -2i\sqrt{3}\ ,\ 3+i\sqrt{3}\ ,\ 2+\frac{2}{\sqrt{3}}i\ ,\ -4\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right],\ \frac{\sqrt{6}}{1+i}\ ,\ \frac{2}{1-i\sqrt{3}}\ ,\ \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 14 :
Mettre chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle :
$z_1 = 1+i\sqrt{3}$ $\quad z_2 = 2-2i$ $\quad z_3 = -2i$ $\quad z_4 = 3$ $\quad z_5 = -3+i\sqrt{3}$.

Exercice 15 :
1. Mettre chacun des nombres suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) \qquad z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \qquad z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$z_4 = \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

2. Les nombres suivants sont-ils sous forme trigonométrique ?

$$z_1 = -2(\cos\pi + i\sin\pi) \qquad z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 16 :
Mettre chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique :
$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\quad z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ $\quad z_4 = \sqrt{2}\,e^{i\pi}$ $\quad z_5 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 17 :
On considère les nombres complexes $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1-i\sqrt{3}$.
1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
2. En déduire le module et un argument des nombres complexes suivants : $\overline{z_1}$, $z_1 z_2$, $\frac{1}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1^{\ 3}$.

III. Application à la géométrie

Exercice 18 :

Soit A et B les points du plan d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_B = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 2i$.

Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$.

Exercice 19 :
Soit A , B et C les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1+i\sqrt{3}$ et $z_B = -1-i\sqrt{3}$ et $z_C = -2$.
Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})$.

Exercice 20 :
Soit A , B , C et D les points du plan d'affixes respectives $z_A = -i$ et $z_B = 3$, $z_C = 2+3i$ et $z_D = -1+2i$.
Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{AC})$.

Exercice 21 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

Dans chacun des cas suivants :

1. Mettre le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

   a) $z_A = 2 \quad z_B = 1-3i \quad z_C = -1+i$ b) $z_A = -1 \quad z_B = 1 \quad z_C = i\sqrt{3}$

   c) $z_A = 1+\dfrac{3}{4}i \quad z_B = 2-\dfrac{5}{4}i \quad z_C = 3+\dfrac{7}{4}i$ d) $z_A = \dfrac{1}{2}+i \quad z_B = \dfrac{3}{2}-i \quad z_C = 1-\sqrt{3}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$