1 Équations du 2e degré.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 - 3x - 5 = 0$.
2. $x^2 - 5x + 2 = 0$.
3. $x^2 - 2x + 6 = 0$.
4. $x^2 - 6x + 9 = 0$.
5. $x(x-3) = 2(x-1)$.
6. $(x-2)(x+3) = (x-2)(4x+1)$.

Aide
Réponses

2 Équations avec changements de variable.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.
2. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.
3. $4x^4 + 4x^2 - 3 = 0$.
4. $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$.

Aide
Réponses

3 Chercher l'erreur.

Il y a une erreur dans la suite d'enchaînements ci-dessous. À quel endroit et pourquoi ?
Je pars de $x = 1$.
J'élève les deux membres au carré : $x^2 = 1$.
Je change de membre : $x^2 - 1 = 0$.
Je factorise : $(x+1)(x-1) = 0$.
Je divise par $x - 1$: $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \dfrac{0}{x-1}$.
Je simplifie l'équation : $x + 1 = 0$.
J'obtiens finalement : $x = -1$.
Conclusion : J'ai prouvé que $-1 = 1$.

Réponse

4 Équations avec des fractions rationnelles.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{x-2}{x-3} = x-1$.
2. $\dfrac{x^2-x}{x-1} = 2x+3$.
3. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.

Aide
Réponses

5 Équations avec des racines carrées.

Exercice plus difficile
Résoudre dans l'ensemble des réels :

1. $\sqrt{x} = x-2$.
2. $\sqrt{x-3} = -x+5$.
3. $\sqrt{x+3} = x-4$.
4. $\sqrt{x-1} = x$.

Aide
Réponses

6 Équations avec des "racines évidentes".

1. On considère l'équation $2x^3 - 13x^2 + 5x + 6 = 0 \quad (E_1)$
   (a) Montrer que le nombre 1 est racine de (E_1).
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $2x^3-13x^2+5x+6 = (x-1)(ax^2+bx+c)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1)
2. Après avoir déterminé une racine évidente, résoudre les équations suivantes :
   (a) $6x^3 + 25x^2 + 21x - 10 = 0 \quad (E_2)$.
   (b) $x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0 \quad (E_3)$.
   (c) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x + 4 = 0 \quad (E_4)$. (Il faut trouver deux racines évidentes)

Aide
Réponses

7 Étude du signe d'une expression

Méthodes

- Si c'est une expression affine, je résous une inéquation.
- Si c'est un polynôme du second degré, je déterminer les racines et j'applique la règle du signe du trinôme.
- Si c'est un polynôme de degré supérieur ou égal à 3 ou bien une fraction rationnelle, je fais un tableau de signes.
- Attention : Une résolution d'équation ne peut, en aucun cas, justifier le signe d'une expression.

Déterminer le signe des expressions suivantes :

1. $A(x) = 2x - 3$.
2. $B(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{3}$.
3. $C(x) = x(x+3)$.
4. $D(x) = 4 - x^2$.
5. $E(x) = x^2 - 3x + 4$.
6. $F(x) = 6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$.
7. $G(x) = \dfrac{(x-5)(x+1)}{x-2}$
8. $H(x) = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$.
9. $I(x) = x^4 - 7x^2 + 12$.

Réponses

L'exercice suivant faisant la synthèse du chapitre, il n'y a aucune explication dans le corrigé, uniquement les réponses. À vous de bien choisir les méthodes à appliquer.

8 Résolution d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-x + 5 \geqslant 8$.
2. $2(x+2) > 5x + 6$.
3. $2x(x+2) > 5x + 6$.
4. $\dfrac{x}{x^2-1} \geqslant 0$.
5. $\dfrac{x}{(x-1)^2} \geqslant 0$.
6. $x^3 + 3x^2 - 7x - 21 \leqslant 0$.
7. $\dfrac{x-2}{2x+1} \geqslant x + 4$.
8. $\dfrac{x}{x-2} \geqslant -x + 4$.

Aide

Exercice n°1:

- On utilise bien sûr le discriminant.
- Pour la 5e équation, il faut d'abord écrire l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
- Pour la 6e équation, vous pouvez utiliser le cours de collège, ou le cours de première.

Retour

Exercice n°2:

- Les trois premières sont des équations bicarrées, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0. Je pose donc $X = x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
  Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l'équation de départ.
- Pour la dernière, je dois poser $X = \sqrt{x}$. (Bien sûr x doit être positif)

Retour

Exercice n°4:

Il faut d'abord exclure les valeurs qui annulent le dénominateur, puis se ramener à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Retour

Exercice n°5:

- La relation $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.
- Pour que l'équation : $\sqrt{x} = x - 2$ soit vérifiée, il faut que $x \geqslant 0$.
- Si l'on met cette équation au carré, l'ensemble des solutions sera-t-il inchangé ?

Retour

Exercice n°6:

Pour déterminer des racines évidentes, on peut :

1. Remplacer l'inconnue par des valeurs entières de x comprises entre -5 et 5 et trouver celle(s) qui annule(nt) le polynôme.
2. Tracer la courbe représentative du polynôme puis regarder les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses.
3. Apprendre à utiliser sa calculatrice (ex : G-solv-Root dans le menu Graph ou le menu Equa sur Casio)

Retour

Correction

1 Équations du second degré

1. $\Delta = 49 > 0$, donc l'équation admet deux solutions réelles :
   $x = \dfrac{3+\sqrt{49}}{4} = \dfrac{5}{2}$ et $x = \dfrac{3-\sqrt{49}}{4} = -1$.
2. $\Delta = 17 > 0$, donc l'équation admet deux solutions : $x = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ et $x = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$.
3. $\Delta = -20 < 0$, donc l'équation n'admet pas de solution réelle.
4. $\Delta = 0$, donc l'équation admet une unique solution réelle : $x = \dfrac{6}{2} = 3$.
5. Je développe, je passe tout dans le premier membre et l'équation s'écrit $x^2-5x+2 = 0$, c'est donc la même équation que la deuxième.
6. $(x-2)(x+3) = (x-2)(4x+1) \Leftrightarrow (x-2)[(x+3)-(4x+1)] = 0 \Leftrightarrow (x-2)(-3x+2) = 0$ donc $S = \left\{\dfrac{2}{3}; 2\right\}$.
   Autre possibilité, je développe pour obtenir : $3x^2 - 8x + 4 = 0$ et j'utilise le discriminant.

Retour

2 Équations avec changement de variable

1. Je pose $X = x^2$, l'équation $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ devient $X^2 - 7X + 12 = 0$.
   Cette équation a pour solutions $X = 3$ ou $X = 4$.
   $X = 4$, donne $x^2 = 4$, c'est à dire $x = -2$ ou $x = 2$ et $X = 3$ donne $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.
   Donc l'équation $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ admet pour ensemble de solutions :
   $S = \{-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\}$.
2. Avec la même méthode on obtient : $X = -2$ ou $X = -1$,
   donc l'équation $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ n'admet pas de solution réelle.
3. Toujours en posant $X = x^2$, on obtient : $X = \dfrac{1}{2}$ ou $X = -\dfrac{3}{2}$,
   donc l'équation $4x^4 + 4x^2 - 3 = 0$ admet pour solutions sur $\mathbb{R}$: $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Cette équation n'est pas définie si $x < 0$.
   Je pose $X = \sqrt{x}$ et l'équation $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$ (1) devient $X^2 - 3X - 4 = 0$ (2).
   L'équation (1) admet pour solutions $X = 4$ ou $X = -1$, donc l'équation (2) admet pour solution $x = 16$

Retour

3 Chercher l'erreur

Je suis parti de $x = 1$, donc lorsque j'ai divisé par $x - 1$, j'ai en fait effectué une division par 0, ce qui est formellement interdit. Tout ce qui suit cette division n'a aucune valeur.

Conclusion : Il faut se prémunir des divisions par 0. Adage à appliquer dès le prochain exercice !

Retour

4 Équations avec des fractions rationnelles

1. $\dfrac{x-2}{x-3} = x - 1 \quad (E)$ Il faut que $x \neq 3$
   $\Leftrightarrow \ x - 2 = (x-3)(x-1)$
   $\Leftrightarrow \ x^2 - 5x + 5 = 0 \quad (E')$ équation dont le discriminant est égal à 5

   donc l'équation (E') a pour solutions $x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ et $x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

   Et l'équation (E) a pour solutions $x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ et $x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

   Remarque : L'équivalence est vérifiée car $x \neq 3$, sinon le raisonnement est effectué par implication et je ne suis pas sûr que toutes les solutions trouvées à l'équation (E') conviennent pour l'équation (E).

2. $\dfrac{x^2 - x}{x-1} = 2x + 3 \quad (E_1)$ Il faut que $x \neq 1$
   $\Leftrightarrow \ x^2 - x = (2x+3)(x-1)$
   $\Leftrightarrow \ x^2 + 2x - 3 \quad (E_2)$

   L'équation (E_2) a pour solutions $x = 1$ et $x = -3$, donc l'équation (E_1) a pour unique solution $x = -3$.

3. Pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0$.

   Or $x \neq 0$, donc l'équation $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ a pour solution $x = 1$.

Retour

5 Équations avec des racines carrées

1. x doit être positif pour que l'équation soit définie.

   Première méthode : Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d'élever au carré.

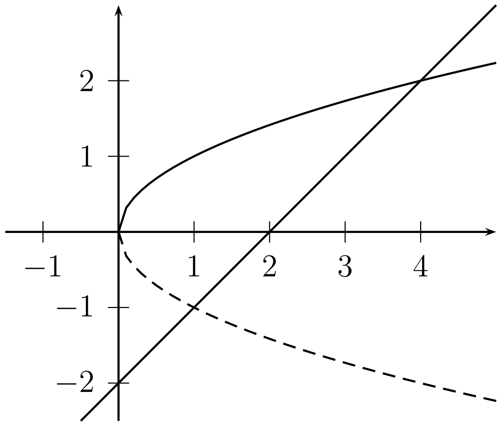
   Pour $x \in [2; +\infty[$: $\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow x = (x-2)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (l'autre solution "1" est inférieure à 2)

   Deuxième méthode : Je travaille par implication et j'étudie la réciproque.

   $\sqrt{x} = x - 2$ donc $x = (x-2)^2$ donc $x^2 - 5x + 4 = 0$ donc $x = 1$ ou $x = 4$.

   Or $\sqrt{1} \neq 1 - 2$ et $\sqrt{4} = 4 - 2$, donc l'équation a pour unique solution $x = 4$.

Interprétation graphique :
$x = 4$ est l'abscisse du point d'intersection entre la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.
$x = 1$ est l'abscisse du point d'intersection entre la courbe d'équation $y = -\sqrt{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.



2. Pour que l'équation soit définie il faut que $x \geqslant 3$ et pour raisonner par équivalence, il faut que $x \leqslant 5$.
   Donc, pour tout nombre $x \in [3; 5]$, on a : $\sqrt{x-3} = -x + 5 \Leftrightarrow x - 3 = (-x+5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.
3. On travaille dans $[4; +\infty[$ et on obtient comme solution $x = \dfrac{9+\sqrt{29}}{2}$.
4. On travaille dans $[0; +\infty[$ et on n'obtient aucune solution réelle pour l'équation.

Retour

6 Équations avec des "racines évidentes"

1. (a) $2 \times 1^3 - 13 \times 1^2 + 5 \times 1 + 6 = 0$, donc 1 est solution de (E_1).
   (b) $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx + cx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$, en identifiant les cœfficients de ce polynôme avec ceux de $2x^3 - 13x^2 + 5x + 6$,
   on obtient $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -13 \\ c - b = 5 \\ -c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -11 \\ c = -6 \end{cases}$
   Donc $2x^3 - 13x^2 + 5x + 6 = (x-1)(2x^2 - 11x - 6)$
   (c) On a : $\begin{array}{rl} & 2x^3 - 13x^2 + 5x + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)(2x^2 - 11x - 6) = 0 \\ \Leftrightarrow & x - 1 = 0 \text{ ou } 2x^2 - 11x - 6 = 0 \end{array}$
   et on obtient l'ensemble des solutions : $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 1; 6\right\}$.
2. (a) -2 est racine évidente de (E_2).
   On obtient $6x^3 + 25x^2 + 21x - 10 = (x+2)(6x^2 + 13x - 5)$.
   Finalement : $S = \left\{-\dfrac{5}{2}; -2; \dfrac{1}{3}\right\}$
   (b) 3 est racine évidente, $x^3 - x^2 - 4x - 6 = (x-3)(x^2 + 2x + 2)$ et $S = \{3\}$.
   (c) 2 et -2 sont racines évidentes, $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x + 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 2x - 1)$, et $S = \{-1 - \sqrt{2}; -2; -1 + \sqrt{2}; 2\}$.

Retour

7 Études de signes

1. $A(x) = 2x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{3}{2}$, donc A est négative sur $\left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$.
   Ce que l'on peut noter sous forme de tableau :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

2. $B(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{7}{3} \times \left(-\dfrac{2}{1}\right) \Leftrightarrow x \leqslant = -\dfrac{14}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{14}{3}$		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

3. $C(x) = x(x+3)$ est un trinôme du second degré admettant deux racines 0 et -3, son cœfficient de terme dominant est positif, donc $C(x)$ est négatif sur $[-3; 0]$ et positif sur $]-\infty; -3] \cup [0; +\infty[$.
4. $D(x) = 4-x^2$ admet pour racines -2 et 2, donc d'après la règle du signe du trinôme :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$D(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. $E(x) = x^2 - 3x + 4$ est un trinôme du seconde degré n'admettant pas de racine réelle, donc pour tout x réel, $E(x)$ est positif.
6. $F(x) = 6x^3 + 25x^2 + 21x - 10 = (x+2)(3x-1)(2x+5)$. (cf ex 6)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

7. $G(x) = \dfrac{(x-5)(x+1)}{x-2}$ Retour

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$G(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

8. $H(x) = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$.
   Le numérateur est positif pour tout x, et le dénominateur est un trinôme du second degré de racines -1 et 1, on peut donc dresser le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

9. D'après l'exercice 2, $I(x) = x^4 - 7x^2 + 12 = (x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-2)$.

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$I(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Retour

8 Résolutions d'inéquations

1. $-x+5 \geqslant 8$, $S =]-\infty; -3]$.
2. $2(x+2) > 5x+6$, $S = \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[$.
3. $2x(x+2) > 5x+6$, $S = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup]2; +\infty[$.
4. $\frac{x}{x^2-1} \geqslant 0$, $S =]-1; 0] \cup]1; +\infty[$.
5. $\frac{x}{(x-1)^2} \geqslant 0$, $S = [0, 1[\cup]1; +\infty[$.
6. $x^3 + 3x^2 - 7x - 21 \leqslant 0$, $S =]-\infty, -3] \cup [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$.
7. Un produit en croix serait malvenu, puisque nous ne connaissons pas le signe de $2x+1$, il faut donc passer tous les termes dans le premier membre et réduire au même dénominateur.
   $\frac{x-2}{2x+1} \geqslant x+4 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-8x-6}{2x+1}$, $S =]-\infty, -3] \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right[$.
8. $\frac{x}{x-2} \geqslant -x+4 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+8}{x-2}$, $S =]2; +\infty[$.

Retour