SOLUTIONS EXERCICES 7 - Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1. Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

$$(a)\ \ y'(x) = x\,y(x) \qquad (b)\ \ y'(x) = \frac{1}{x}\,y(x) \qquad (c)\ \ y'(x) = x^2\,y(x)$$

$$(d)\ \ y'(x) = \frac{1}{x^2}\,y(x) \qquad (e)\ \ y'(x) = e^x y(x) \qquad (f)\ \ y'(x) = \frac{x\,y(x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(g)\ \ y'(x) = \ln(x)\,y(x) \qquad (h)\ \ y'(x) = \sin(x)\cos(x)\,y(x)$$

Sol. Nous avons appris que toutes les solutions d'un problème homogène $y'(x) = a(x)y(x)$ sont :

$$y_h(x) = Ce^{A(x)},$$

avec C une constante et $A(x)$ une fonction en x telle que $A'(x) = a(x)$. Donc la seule difficulté dans l'exercice est de trouver $A(x)$, avec la propriété énoncée, pour chaque équation (en faisant toujours attention à l'ensemble de définition) :

(a) $A(x) = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow y_h(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}$,

(b) Il faut faire attention à l'ensemble de définition, qui est $x \neq 0$ (c.-à-d. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$), donc dans notre recherche des solutions il faut distinguer le cas $x > 0$ et le cas $x < 0$.
Pour $x > 0$ on a $A(x) = \ln(x) \Longrightarrow y_h(x) = C_1 x$.
Pour $x < 0$, on peut écrire l'équation comme $y'(x) = -\frac{1}{-x}\,y(x)$; donc $A(x) = \ln(-x) \Longrightarrow y_h(x) = C_2 e^{\ln(-x)} = -C_2 x = C_3 x$. (On a fait cela sinon $\ln(x)$ n'est pas défini pour $x < 0$).

(c) $A(x) = \frac{x^3}{3} \Longrightarrow y_h(x) = Ce^{\frac{x^3}{3}}$,

(d) Comme en (b), l'ensemble de définition est $x \neq 0$. Donc comme on a déjà fait, il faut distinguer le cas $x > 0$ et $x < 0$.
Pour $x > 0$ on a $A(x) = -\frac{1}{x}$ et donc $y_h(x) = C_1 e^{-\frac{1}{x}}$.
Pour $x < 0$, également on a $A(x) = -\frac{1}{x}$ et donc $y_h(x) = C_2 e^{-\frac{1}{x}}$.
Faites attention : on ne peut dire que donc on a une solution globale sur $\mathbb{R}$, car pour $x = 0$ il y a un problème de définition.

(e) $A(x) = e^x \Longrightarrow y_h(x) = Ce^{e^x}$,

(f) Comme en (b) et (d) il faut faire attention à l'ensemble de définition, qui dans ce cas est donné par $-2 \leq x \leq 2$. Avec cette condition $A(x) = -\sqrt{4-x^2}$ et donc $y_h(x) = Ce^{-\sqrt{4-x^2}}$ pour $-2 \leq x \leq 2$.

(g) Dans ce cas l'ensemble de définition est $x > 0$. Avec cette condition $A(x) = x\ln(x) - x$ et donc $y_h(x) = Cx^x e^{-x}$ pour toute $x > 0$.

(h) $A(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} \Longrightarrow y_h(x) = Ce^{\frac{\sin^2(x)}{2}}$.

Exercice 2. Déterminer les (uniques) solutions des équations de l'exercice précédent vérifiant respectivement

$$(a)\ \ y(0) = 1 \qquad (b)\ \ y(1) = \pi \qquad (c)\ \ y(1) = e$$
$$(d)\ \ y(2) = 1 \qquad (e)\ \ y(0) = e \qquad (f)\ \ y(2) = 0$$
$$(g)\ \ y(1) = 1 \qquad (h)\ \ y(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

Sol. Il faut trouver la constante C telle que $y_h(x)$, trouvée dans l'exercice précedent, satisfasse la condition requise dans chaque point. Il faut faire toujours attention que le point où la condition est requise soit dans l'ensemble de définition de notre équation. On dénote l'unique solution $y_0(x)$. Donc en utilisant l'exercice 1 on a :

(a) $y_h(0) = Ce^0 = C$ et on veut avoir $y_h(0) = 1 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow y_0(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$,

(b) $y_h(1) = C$ et on veut avoir $y_h(1) = \pi \Longrightarrow C = \pi \Longrightarrow y_0(x) = \pi x$ (definie pour $x > 0$),

(c) $y_h(1) = Ce^{1/3}$ et on veut avoir $y_h(1) = e \Longrightarrow C = e^{2/3} \Longrightarrow y_0(x) = e^{\frac{2+x^3}{3}}$,

(d) $y_h(2) = Ce^{-1/2}$ et on veut avoir $y_h(2) = 1 \Longrightarrow C = e^{1/2} \Longrightarrow y_0(x) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}$ (definie pour $x > 0$),

(e) $y_h(0) = Ce^1 = Ce$ et on veut avoir $y_h(0) = e \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow y_0(x) = e^{e^x}$,

(f) $y_h(2) = Ce^0 = C$ et on veut avoir $y_h(2) = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow y_0(x) = 0$ (definie pour $-2 \leq x \leq 2$),

(g) $y_h(1) = Ce^{-1}$ et on veut avoir $y_h(1) = 1 \Longrightarrow C = e \Longrightarrow y_0(x) = e^{1-x}x^x$ (definie pour $x > 0$),

(h) $y_h(\pi/2) = Ce^{1/2}$ et on veut avoir $y_h(\pi/2) = 1 \Longrightarrow C = e^{-1/2} \Longrightarrow y_0(x) = e^{\frac{\sin^2(x)-1}{2}}$.

Exercice 3. Donner toutes les solutions des équations différentielles suivantes (pour simplifier la notation on a écrit y à la place de $y(x)$) :

(a) $y' = -y + xe^{-x} + 1$

(b) $y' = 3y + \sin(3x)$

(c) $y' = y + \sin(x) + 2\cos(x)$

(d) $3y' = -2y + x^3 + 6x + 1$

Sol. Soit $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1. En suivant la méthode qu'on a appris au cours, d'abord on trouve toutes les solutions de l'équation homogène associée $y_h(x)$ et après on trouve une solution particulière $y_p(x) = c(x)y_0(x)$, où $y_0(x)$ est une solution homogène particulière (précisément celle qu'on obtient de l'expression de $y_h(x)$ avec la constante $C = 1$) et

$c(x) = \int \frac{b(x)}{y_0(x)} dx$. Une fois qu'on a trouvé $y_h(x)$ (infinies) et $y_p(x)$ (une seule), toutes les solutions de l'équation initielle sont :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

(*a*) L'équation homogène associée est $y' = -y$, donc on voit immédiatement que

$$y_h(x) = Ce^{-x}.$$

On choisit $y_0(x) = e^{-x}$ et on va trouver $c(x) = \int \frac{xe^{-x}+1}{e^{-x}} dx$

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{xe^{-x}+1}{e^{-x}} dx \\ &= \int (x + e^x) dx = \frac{x^2}{2} + e^x. \end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = c(x) y_0(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x} + 1.$$

Ainsi toutes les solutions sont :

$$y(x) = Ce^{-x} + \frac{x^2}{2} e^{-x} + 1.$$

(*b*) L'équation homogène associée est $y' = 3y$, donc on voit immédiatement que

$$y_h(x) = Ce^{3x}.$$

En utilisant les raccourcis (car $a(x) = 3$ ne dépend pas de x), on a $y_p(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$, avec A et B à déterminer. Vu que $y_p(x)$ doit satisfaire l'équation initiale, afin de trouver A et B on calcule $y_p'(x) = 3y_p(x) + \sin(3x)$:

$$3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) = 3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) + \sin(3x),$$

d'où on obtient (en factorisant les coefficients de $\cos(3x)$ et de $\sin(3x)$)

$$\begin{cases} 3A - 3B = 0 \\ -3B - 3A - 1 = 0 \end{cases}$$

qui nous donne $A = B = -\frac{1}{6}$.
Donc

$$y_p(x) = -\frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x).$$

Ainsi toutes les solutions sont :

$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x).$$

(*c*) L'équation homogène associée est $y' = y$, donc on voit immédiatement que

$$y_h(x) = Ce^x.$$

En utilisant les raccourcis (car $a(x) = 1$ ne dépende pas de x), on a $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x) + 2C\sin(x) + 2D\cos(x) = E\sin(x) + F\cos(x)$, avec E et F à déterminer. Comme $y_p(x)$ doit satisfaire l'équation initiale, afin de trouver E et F on calcule $y_p'(x) = y_p(x) + \sin(x) + 2\cos(x)$:

$$E\cos(x) - F\sin(x) = E\sin(x) + F\cos(x) + \sin(x) + 2\cos(x),$$

d'où l'on obtient (en factorisant les coefficients de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$)

$$\begin{cases} E - F - 2 = 0 \\ -F - E - 1 = 0 \end{cases}$$

qui nous donne $E = \frac{1}{2}$ et $F = -\frac{3}{2}$.
Donc

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{3}{2}\cos(x).$$

Ainsi toutes les solutions sont :

$$y(x) = Ce^x + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{3}{2}\cos(x).$$

(d) L'équation est équivalente à $y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{3}$. L'équation homogène associée est $y' = -\frac{2}{3}y$, donc on voit immédiatement que

$$y_h(x) = Ce^{-\frac{2}{3}x}.$$

En utilisant les raccourcis (car $a(x) = -\frac{2}{3}$ ne dépende pas de x), on a $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Dx + E$, avec A, B, D et E à déterminer. Comme $y_p(x)$ doit satisfaire l'équation initiale, afin de trouver les coefficients on calcule $y_p'(x) = -\frac{2}{3}y_p(x) + \frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{3}$:

$$3Ax^2 + 2Bx + D = -\frac{2}{3}(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E) + \frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{3},$$

d'où l'on obtient (en factorisant les coefficients de x^3, x^2, x et de 1)

$$\begin{cases} \frac{2}{3}A - \frac{1}{3} = 0 \\ 3A + \frac{2}{3}B = 0 \\ 2B + \frac{2}{3}D - 2 = 0 \\ D + \frac{2}{3}E - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

qui nous donne $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{9}{4}$, $D = \frac{39}{4}$ et $E = -\frac{113}{8}$. Donc

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{39}{4}x - \frac{113}{8}.$$

Ainsi toutes les solutions sont :

$$y(x) = Ce^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{39}{4}x - \frac{113}{8}.$$

Exercice 4. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants (pour simplifier la notation on écrit a y à la place de $y(x)$) :

$$(a)\begin{cases} y' = -5y + 3 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} y' = -3y + 4e^x \\ y(0) = -2 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} y' = 3y + \sin(3x) + \sin(2x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sol. Pour trouver l'UNIQUE (!) solution d'un problème de Cauchy il faut d'abord trouver toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans la première ligne et après trouver l'unique valeur de la constante C telle que la condition dans la deuxième ligne soit satisfaite.

(a) L'équation $y' = -5y + 3$ a comme solutions homogènes $y_h(x) = Ce^{-5x}$ et solution particulière $y_p(x) = \frac{3}{5}$. Donc toutes les solutions sont $y(x) = Ce^{-5x} + \frac{3}{5}$. Maintenant il faut trouver C tel que $y(0) = 0$ mais en posant $x = 0$ on obtient

$$y(0) = Ce^0 + \frac{3}{5} = C + \frac{3}{5}$$

donc $C = -\frac{3}{5}$.
Donc l'unique solution du problème de Cauchy est :

$$y(x) = \frac{3}{5}(-e^{-5x} + 1).$$

(b) L'équation $y' = -3y + 4e^x$ a comme solutions homogènes $y_h(x) = Ce^{-3x}$ et solution particulière (en utilisant les raccourcis car -3 ne dépend pas de x) $y_p(x) = Ae^x$, avec A à déterminer. Pour trouver A on va substituer $y_p(x)$ dans l'équation initiale en obtenant $Ae^x = -3Ae^x + 4e^x$, d'où on a $A = 1$ (en factorisant les coefficients de e^x). Donc toutes les solutions sont $y(x) = Ce^{-3x} + e^x$. Maintenant il faut trouver C tel que $y(0) = -2$: en posant $x = 0$ on obtient

$$y(0) = Ce^0 + 1 = C + 1$$

donc $C = -3$.
Donc l'unique solution du problème de Cauchy est :

$$y(x) = -3e^{-3x} + e^x.$$

(c) L'équation $y' = 3y + \sin(3x) + \sin(2x)$ a comme solutions homogènes $y_h(x) = Ce^{3x}$ et solution particulière (en utilisant les raccourcis car 3 ne dépend pas de x) de type $y_p(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x) + D\sin(2x) + E\cos(2x)$, avec A, B, D et E à déterminer. Pour les trouver on va substituer $y_p(x)$ dans l'équation initiale en obtenant

$$3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) + 2D\cos(2x) - 2E\sin(2x) = 3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) + 3D\sin(2x) + 3E\cos(2x) + \sin(3x) + \sin(2x)$$

d'où (en factorisant les coefficients de $\sin(3x)$, $\cos(3x)$, $\sin(2x)$, $\cos(2x)$) on a

$$\begin{cases} 3A - 3B = 0 \\ -3A - 3B - 1 = 0 \\ 2D - 3E = 0 \\ -2E - 3D - 1 = 0 \end{cases}$$

qui nous donne $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$, $D = -\frac{3}{13}$ et $E = -\frac{2}{13}$. Donc toutes les solutions sont $y(x) = Ce^{3x} - \frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{3}{13}\sin(2x) - \frac{2}{13}\cos(2x)$. Maintenant il faut trouver C tel que $y(0) = 0$ mais en posant $x = 0$ on obtient

$$y(0) = Ce^0 - \frac{1}{6} - \frac{2}{13} = C - \frac{25}{78}$$

donc $C = \frac{25}{78}$.
Donc l'unique solution du problème de Cauchy est :

$$y(x) = \frac{25}{78}e^{3x} - \frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{3}{13}\sin(2x) - \frac{2}{13}\cos(2x).$$

Exercice 8. Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes suivants :

(a) $(1+x^2)\,y'(x) - 2x\,y(x) = (1+x^2)^2$

(b) $y'(x) + 2x\,y(x) = 2xe^{-x^2}$

(c) $y'(x) = x^2(1-y(x))$

Sol. Pour la notation regarder l'exercice 3.

(a) On veut résoudre l'équation $(1+x^2)y'(x)-2xy(x) = (1+x^2)^2$, que, en divisant par $(1+x^2)$ ($1+x^2 \neq 0$ pour toute x donc aucun problème), on peut écrire aussi comme $y'(x) = \frac{2x}{1+x^2}y(x) + 1 + x^2$. Les solutions homogènes associées sont :

$$y_h(x) = Ce^{\ln(1+x^2)} = C(1+x^2)$$

et pour trouver la solution particulière on va calculer l'intégrale qui nous donne $c(x)$ (attention, dans ce cas on ne peut utiliser les raccourcis !) :

$$c(x) = \int \frac{1+x^2}{1+x^2}dx = \int 1dx = x,$$

donc

$$y_p(x) = x(1+x^2).$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation (a) sont

$$y(x) = (1+x^2)(C+x).$$

(b) On veut résoudre l'équation $y'(x) = -2xy(x) + 2xe^{-x^2}$. Les solutions homogènes associées sont :

$$y_h(x) = Ce^{-x^2}$$

et pour trouver la solution particulière on va calculer l'intégrale qui nous donne $c(x)$ (attention, dans ce cas on ne peut pas utiliser les raccourcis !) :

$$c(x) = \int \frac{2xe^{-x^2}}{e^{-x^2}}dx = \int 2xdx = x^2,$$

donc

$$y_p(x) = e^{-x^2}x^2.$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation (b) sont

$$y(x) = e^{-x^2}(C+x^2).$$

(c) On veut résoudre l'équation $y'(x) = x^2(1-y(x))$, qu'on peut écrire aussi comme $y'(x) = -x^2y(x) + x^2$. Les solutions homogènes associées sont :

$$y_h(x) = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

et pour trouver la solution particulière on va calculer l'intégrale qui nous donne $c(x)$ (attention, dans ce cas on ne peut pas utiliser les raccourcis !) :

$$c(x) = \int \frac{x^2}{e^{-\frac{x^3}{3}}} dx = \int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx = e^{\frac{x^3}{3}},$$

donc

$$y_p(x) = e^{\frac{x^3}{3}} e^{-\frac{x^3}{3}} = 1.$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation (c) sont

$$y(x) = Ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1.$$

Exercice 9. Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

$$(a)\ \ y'(x) = \frac{2}{x+1} y(x) \qquad (b)\ \ xy'(x) + 3y(x) = 0 \qquad (c)\ \ y'(x) + \cos(x) y(x) = 0$$

Utilisant le point précédent, résoudre les problèmes inhomogènes suivants :

(a) $y'(x) = \dfrac{2}{x+1} y(x) + (x+1)^2 \cos(x)$

(b) $xy'(x) + 3y(x) = x^2$

$(c)^\star$ $y'(x) + \cos(x) y(x) = \sin(x) \cos(x)$ (...utiliser l'intégration par parties...)

Sol. On va résoudre directement les trois équations différentielles, pour la notation regarder l'exercice 3 :

(a) D'abord il faut remarquer que l'ensemble de définition est donné par la condition $x \neq -1$. Donc dans notre recherche des solutions il faut distinguer le cas $x > -1$ et le cas $x < -1$.

Pour $x > -1$, les solutions homogènes associées sont :

$$y_h(x) = C_1 e^{2\ln(x+1)} = C_1 (x+1)^2$$

et pour trouver la solution particulière on va calculer l'intégrale qui nous donne $c(x)$ (attention, dans ce cas on ne peut pas utiliser les raccourcis !) :

$$c(x) = \int \frac{(x+1)^2 \cos(x)}{(x+1)^2} dx = \int \cos(x) dx = \sin(x),$$

donc

$$y_p(x) = \sin(x)(x+1)^2.$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation (a) pour $x > -1$ sont

$$y(x) = (C_1 + \sin(x))(x+1)^2.$$

Pour $x < -1$, les solutions homogènes associées sont :

$$y_h(x) = C_2 e^{-2\ln(-(x+1))} = C_2 (x+1)^2$$

et comme avant $c(x) = \sin(x)$, donc

$$y_p(x) = \sin(x)(x+1)^2.$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation (a) pour $x < -1$ sont

$$y(x) = (C_2 + \sin(x))(x+1)^2.$$

(b) D'abord on écrit l'équation avec coefficient de $y'(x)$ égal à 1. Cette à dire pour $x \neq 0$ on divise par x en obtenant $y'(x) = -\frac{3}{x}y(x) + x$. Comme l'ensemble de définition maintenant est $x \neq 0$, pour trouver les solutions il faut distinguer le cas $x > 0$ et $x < 0$.
Pour $x > 0$, les solutions homogènes associées sont :

$$y_h(x) = C_1 e^{-3\ln(x)} = C_1 x^{-3}$$

et pour trouver la solution particulière on va calculer l'intégrale qui nous donne $c(x)$ (attention que dans ce cas on ne peut pas utiliser les raccourcis !) :

$$c(x) = \int \frac{x}{x^{-3}} dx = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5},$$

donc

$$y_p(x) = \frac{x^5}{5} x^{-3} = \frac{x^2}{5}.$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation (b) pour $x > 0$ sont

$$y(x) = C_1 x^{-3} + \frac{x^2}{5}.$$

Pour $x < 0$, les solutions homogènes associées sont :

$$y_h(x) = C_2 e^{-3\ln(-x)} = C_3 x^{-3}$$

et comme avant $c(x) = \frac{x^5}{5}$, donc

$$y_p(x) = \frac{x^5}{5} x^{-3} = \frac{x^2}{5}.$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation (b) pour $x < 0$ sont

$$y(x) = C_2 x^{-3} + \frac{x^2}{5}.$$

Attention ! Pour cette équation il y a aussi une solution globale (c.-à-d. une solution définie sur tout $\mathbb{R}$) et pour l'expliciter il faut trouver la constante C pour la quelle on peut unifier une solution à droite de 0 et une à gauche pour avoir une fonction continue en 0. La seule constante qui nous donne cette propriété est $C = 0$, donc la seule solution globale est :

$$y(x) = \frac{x^2}{5}.$$

(c) D'abord on amène $\cos(x)y(x)$ à droite, donc l'équation devient $y'(x) = -\cos(x)y(x)+\sin(x)\cos(x)$. Les solutions homogènes associées sont :

$$y_h(x) = Ce^{-\sin(x)}$$

et pour trouver la solution particulière on va calculer l'intégrale qui nous donne $c(x)$ (attention que dans ce cas on ne peut pas utiliser les raccourcis !) :

$$c(x) = \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{e^{-\sin(x)}}dx = \int \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)},$$

on le résout par partie ($\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$) avec $u(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ (et donc $u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = e^{\sin(x)}$), Donc

$$y_p(x) = (e^{\sin(x)}\sin(x) - e^{\sin(x)})e^{-\sin(x)} = \sin(x) - 1.$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation (c) sont

$$y(x) = Ce^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1.$$

Exercice 10.* Les problèmes de Cauchy suivants sont de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n$. La *méthode de Bernoulli* consiste à les réduire à des problèmes linéaires de première ordre en substituant $z(x) = y(x)^{1-n}$. Donnez la solution unique en utilisant cette méthode et précisez l'intervalle maximal d'existence.

$$(a) \begin{cases} y'(x) &= y(x) + y(x)^2, \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y'(x) &= xy(x)^2 + \dfrac{xy(x)}{1+x^2} \\ y(0) &= -3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} y'(x) = y(x) - 2xy(x)^3 \\ 2y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{e} \end{cases}$$

Sol.

(a) En suivant la méthode expliquée dans l'énoncé du problème on pose $z(x) = y(x)^{-1}$, d'où $z'(x) = -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)} = -y'(x)z^2(x)$ et donc $y'(x) = -\dfrac{z'(x)}{z^2(x)}$. Ainsi notre équation devient $-\dfrac{z'(x)}{z^2(x)} = \dfrac{1}{z(x)} + \dfrac{1}{z^2(x)}$, d'où, en multipliant par $z^2(x)$ (et en changeant le signe), on obtient $z'(x) = -z(x) - 1$. Maintenant l'équation est devenue plus abordable, on a que toutes les solutions homogènes sont $z_h(x) = Ce^{-x}$ et $z_p(x) = c(x)e^{-x}$, avec $c(x) = \int -e^x dx = -e^x$. Donc $z_p(x) = -1$ et toutes les solutions de l'équation sont :

$$z(x) = Ce^{-x} - 1,$$

d'où on obtient

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-x} - 1},$$

définie pour toute x telle que $Ce^{-x} \neq 1$, c.-à-d. $x \neq -\ln(1/C)$.

Il ne nous reste qu' imposer la condition $y(0) = 1$. Vu que $y(0) = \dfrac{1}{Ce^0 - 1} = \dfrac{1}{C-1}$, en posant ça égal à 1, on obtient $C = 2$. Donc l'unique solution du problème de Cauchy (a) qu'on obtient est :

$$y(x) = \frac{1}{2e^{-x} - 1}$$

définie pour tout $x \neq \ln(2)$.

(b) En suivant la méthode expliquée dans l'énoncé du problème on pose $z(x) = y(x)^{-1}$, d'où $z'(x) = -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)} = -y'(x)z^2(x)$ et donc $y'(x) = -\dfrac{z'(x)}{z^2(x)}$.

Ainsi notre équation devient $-\dfrac{z'(x)}{z^2(x)} = \dfrac{x}{z^2(x)} + \dfrac{x}{1+x^2} \cdot \dfrac{1}{z(x)}$, d'où, en multipliant par $z^2(x)$ (et en changeant le signe), on obtient $z'(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}z(x) - x$ (l'ensemble de définition est tout $\mathbb{R}$, car $1+x^2$ est toujours positif). Maintenant l'équation est devenue plus abordable, on a que toutes les solutions homogènes sont $z_h(x) = Ce^{-\frac{\ln(1+x^2)}{2}} = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $z_p(x) = c(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, avec $c(x) = \int -x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$. Donc $z_p(x) = -\dfrac{1}{3}(1+x^2)$ et toutes les solutions de l'équation sont :

$$z(x) = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(1+x^2) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(C - \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right),$$

d'où on obtient

$$y(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{C - \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il ne nous reste qu'imposer la condition $y(0) = -3$. Comme $y(0) = \dfrac{1}{C-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{3C-1}$, en posant cela égal à -3, on obtient $C = 0$. Donc l'unique solution du problème de Cauchy (b) qu'on obtient est :

$$y(x) = -\frac{3}{1+x^2}$$

définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) En suivant la méthode expliquée dans l'énoncé du problème on pose $z(x) = y(x)^{-2}$ (donc $y(x) = \pm 1/\sqrt{z(x)}$), d'où $z'(x) = -\dfrac{2y'(x)}{y^3(x)} = -2z(x)^{\frac{3}{2}}y'(x)$ et donc $y'(x) = -\dfrac{z'(x)}{2z(x)^{\frac{3}{2}}}$.

Ainsi notre équation devient $-\dfrac{z'(x)}{2z^{\frac{3}{2}}(x)} = \dfrac{1}{z^{\frac{1}{2}}(x)} - \dfrac{2x}{z^{\frac{3}{2}}(x)}$, d'où, en multipliant par $2z^{\frac{3}{2}}(x)$ (et en changeant le signe), on obtient $z'(x) = -2z(x) + 4x$. Maintenant l'équation est devenue plus abordable, on a que toutes les solutions homogènes sont $z_h(x) = Ce^{-2x}$ et $z_p(x) = c(x)e^{-2x}$, avec $c(x) = \int 4xe^{2x}dx = 2xe^{2x} - e^{2x}$ (par parties !). Donc $z_p(x) = 2x - 1$ et toutes les solutions de l'équation sont :

$$z(x) = Ce^{-2x} + 2x - 1,$$

d'où on obtient

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{Ce^{-2x} + 2x - 1}}.$$

Il ne nous reste qu'imposer la condition $y(1/2) = \pm\sqrt{e}/2$. Vu que $y(1/2) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{Ce^{-1}+1-1}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{Ce^{-1}}} = \pm\dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{C}}$, en posant cela égal à $\sqrt{e}/2$, on obtient $C = 4$. Donc l'unique solution du problème de Cauchy (c) qu'on obtient est :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{4e^{-2x} + 2x - 1}}$$

définie pour tout x tel que $4e^{-2x} + 2x - 1 \geq 0$.