



Fiche 12 : Similitudes

Plan de la fiche

- I - Généralités
- II - Ecriture complexe d'une similitude
- III - Propriétés géométriques
- IV - Classification des similitudes directes, formes réduites
- V - Triangles semblables

I - Généralités

Définitions

Similitude

Soit k un réel strictement positif.

- Une similitude de rapport k est une transformation du plan f telle que :
 $f(M)f(N) = kMN$ pour tout point M , pour tout point N .
- On dit que f multiplie les distances par k .

Isométrie

- Une isométrie est une similitude de rapport 1.
- Une isométrie f conserve les distances :
 $f(M)f(N) = MN$ pour tout point M , pour tout point N .

Exemples

- Une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.
- Une rotation, une translation, une réflexion sont des isométries.
- La composée d'une homothétie de rapport λ et d'une isométrie est une similitude de rapport $|\lambda|$.

Propriétés

- La transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
- La composée de deux similitudes de rapports respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 k_2$.
- Toute similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie, la similitude et l'homothétie ayant le même rapport.

Similitudes et angles

Une similitude conserve les angles géométriques :

si A, B et C ont respectivement pour images A', B' et C' alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

Une similitude est directe ou bien indirecte.

Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles orientés.

Ainsi, pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C' on a :

$$(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}) = (\overline{AB}, \overline{AC})[2\pi].$$

Similitude indirecte

Une similitude indirecte change le sens des angles orientés.

Ainsi, pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C' on a :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi].$$

Déplacements et antidéplacements

- Une similitude directe de rapport 1 est une isométrie directe ou déplacement.
- Une similitude indirecte de rapport 1 est une isométrie indirecte ou antidéplacement.

Exemples

- Toute homothétie est une similitude directe.
- Toute rotation, toute translation est un déplacement.
- Toute réflexion est un antidéplacement.
- La composée d'une réflexion et d'une homothétie est une similitude indirecte.

☞ Méthode : « Montrer qu'une similitude est indirecte et déterminer ses éléments caractéristiques », fiche exercices n°12 « Similitudes ».

II - Ecriture complexe d'une similitude**Ecriture complexe d'une similitude directe**

Soit f une similitude directe.

Il existe un unique complexe non nul a et un unique complexe b tels que, pour tout point M d'affixe z et tout point M' d'affixe z' , M' est l'image de M par f si et seulement si : $z' = az + b$.

Le rapport de f est alors $|a|$.

L'égalité $z' = az + b$ est l'écriture complexe de la similitude directe f .

Un déplacement a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta}z + b$.

Ecriture complexe d'une similitude indirecte

Soit f une similitude indirecte.

Il existe un unique complexe non nul a et un unique complexe b tels que, pour tout point M d'affixe z et tout point M' d'affixe z' , M' est l'image de M par f si et seulement si : $z' = a\bar{z} + b$.

Le rapport de f est alors $|a|$.

L'égalité $z' = a\bar{z} + b$ est l'écriture complexe de la similitude indirecte f .

Un antidéplacement a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta}\bar{z} + b$.

Exemples

- $z' = z + 3$ est l'écriture complexe de la translation dont le vecteur a pour affixe 3.
- $z' = -2z$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport -2 .
- $z' = iz$ est l'écriture complexe du quart de tour direct de centre O .
- $z' = \bar{z}$ est l'écriture complexe de la réflexion d'axe (Ox) .
- $z' = -2i\bar{z} + 3$ est la composée des quatre similitudes ci-dessus (dans un ordre bien précis...).

☞ Méthode : « Déterminer l'écriture complexe d'une similitude indirecte », fiche exercices n°12 « Similitudes ».

☞ Méthode : « Déterminer les points fixes d'une similitude indirecte dont on connaît l'écriture complexe », fiche exercices n°12 « Similitudes ».

☞ Méthode : « Montrer qu'un antidéplacement dont on connaît l'écriture complexe est une réflexion », fiche exercices n°12 « Similitudes ».

III - Propriétés géométriques

- Une similitude transforme une droite en une droite, une demi-droite en une demi-droite, un segment en un segment, un cercle en un cercle.
- Une similitude conserve le parallélisme, l'orthogonalité, les contacts, les barycentres.

☞ Méthode : « Déterminer l'image d'un point caractérisé géométriquement (milieu, barycentre, point d'intersection de deux droites...) », fiche exercices n°12 « Similitudes ».

☞ Méthode : « Déterminer le lieu d'un point », fiche exercices n°12 « Similitudes ».

IV - Classification des similitudes directes, forme réduite

Classification

On considère une similitude directe f d'écriture complexe $z' = az + b$ (a complexe non nul et b complexe).

- Lorsque $a = 1$, f est la translation dont le vecteur a pour affixe b :
 - l'ensemble des points fixes de f est vide lorsque b est non nul ;
 - sinon tout point est invariant (f est l'identité du plan).
- Lorsque a est différent de 1, f admet un point fixe et un seul, le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$, et f est la composée commutative :
 - de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$;
 - de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$.

On pose $k = |a|$ et on désigne par ω l'affixe de Ω et par θ un argument de a .

Alors : $f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}$.

L'écriture complexe de la similitude directe est $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$.

On dit que f est la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ .

Exemples

a) La similitude directe de centre $\Omega(1+2i)$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ a pour écriture complexe $z' - (1+2i) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (1+2i))$, soit encore $z' = \sqrt{2}(1+i)z + \sqrt{2} + 1 + (2-3\sqrt{2})i$.

b) La similitude directe d'écriture complexe $z' = -2iz + 1 - i$ a pour centre $\Omega\left(\frac{-1-i}{2}\right)$, pour rapport 2 et π est une mesure de son angle.

Propriétés géométriques d'une similitude directe de centre Ω

Soit f une similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ

Pour tout point M d'image M' par f on a :

$$\Omega M' = k \Omega M \text{ et } (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \theta [2\pi].$$

Pour tout point A d'image A' et tout point B d'image B' par f on a :

$$A'B' = kAB \text{ et } (\overline{AB}, \overline{A'B'}) = \theta [2\pi].$$

☞ Méthode : « Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe définie géométriquement », fiche exercices n°12 « Similitudes ».

☞ Méthode : « Déterminer des images de points en identifiant des configurations classiques », fiche exercices n°12 « Similitudes ».

V - Triangles semblables

On considère deux triangles ABC et $A'B'C'$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

• il existe une similitude f telle que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$;

• $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

• $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$;

• $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$.

Lorsque ces propositions sont satisfaites, on dit que les triangles sont semblables.

☞ Méthode : « Montrer que des triangles sont semblables », fiche exercices n° 12 « Similitudes ».