Chapitre 9 – Les équations différentielles

A) Généralités

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle apparaissent une ou plusieurs dérivées de cette fonction.

L'**ordre** d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé apparaissant dans l'équation.

Exemples :

$y' = 2y$	$y^{(4)} + 3y'' - y' = y + 2x$	$y'' + 4y = 0$
$y'' = x^2$	$y = 4y''$	$y' = y + 2$

etc…

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette équation.

La solution générale de l'équation différentielle est la formule générale qui représente ces solutions.

Exemple :

$y' = x$ Solution générale : $y = \frac{x^2}{2} + c$

Remarques :

- Quand on connaît les primitives d'une fonction f(x), on sait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' = f(x)$$

- De même $y'' = f(x)$ (ou $y^{(n)} = f(x)$) peut être résolue si on sait remonter à la primitive seconde (ou $n^{\text{ième}}$) de f(x).
- Pour les autres équations différentielles, on ne sait résoudre que certains cas particuliers. On en étudiera les deux plus simples, **$y' = ay$** et **$y'' + w^2y = 0$.**

B) Équation y' = ay (a réel quelconque)

1) Solution générale

Prenons la fonction $y = k\,e^{ax}$, sa dérivée est $y' = k\,a\,e^{ax} = a\,y$
On a donc le résultat suivant :

La solution générale de l'équation $y' = ay$ est la fonction $y = k\,e^{ax}$ où k est une constante quelconque.

Remarque : on peut prouver que c'est l'unique forme possible de la solution générale, mais on l'admettra seulement ici.

2) Applications

Trouver la S.G. de l'équation différentielle dans les cas suivants :

a) $y' = 3y$

b) $y' + 2y = 0$

c) $2y' - y = 0$

d) $3y' = 2y$

3) Solutions particulières

Dans la pratique, on est confrontés à des équations différentielles en physique (mécanique, électricité…), mais on veut trouver une solution unique, celle qui correspond à un problème précis.

C'est possible si on connaît les "conditions initiales", c'est à dire la valeur de y pour un x particulier (en général pour x=0).

Théorème :
L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution prenant la valeur y_0 en x_0.

Exemples :
Trouver la solution particulière dans les cas suivants :

a) $y' = 5y$ avec $y(0) = 7$

b) $y' + 2y = 0$ avec $y(1) = e$

c) $u(t) + 2.\ 10^{-3}\, u'(t) = 0$ avec $u(0) = 10$

d) $3y' = 2y$ avec $y(0) = 9$

C) Équation différentielle $y'' + w^2y = 0$

1) Solution générale

Rappelez-vous : $(\sin(x))' = \cos(x)$ et $(\sin(x))'' = -\sin(x)$, c'est à dire $(\sin(x))'' + \sin(x) = 0$!

C'est vrai aussi pour cos(x) … et pour avoir un coefficient multiplicateur sur y'', il suffit de l'avoir sur y', et on se souvient aussi que :
$(\sin(ax))' = -a \cos(ax)$ d'où $(\sin(ax))'' = -a^2 \sin(ax)$

Les fonctions k sin(wx) et k cos(wx) répondent donc à la question !

Théorème (admis) :

La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y'' + w^2y = 0$ est :

$y = a \cos(wx) + b \sin(wx)$, où a et b sont des réels quelconques.

Exemples :

Résoudre les équations suivantes :

a) y'' + 16 y = 0

Solution Générale : y = a cos(4x) + b sin(4x).

b) y'' = -4 y

c) y'' + 3 y = 0

d) 4y'' = -y

2) Solution particulière

La solution générale dépend ici de deux constantes !
Il faut donc connaître deux conditions initiales pour les déterminer.

Théorème (admis) :
L'équation y'' + w²y = 0 admet une solution unique vérifiant deux conditions initiales données.

Remarque :
Les conditions initiales peuvent concerner y ou ses dérivées.

On peut donc, soit donner comme conditions initiales la valeur de y pour deux x distincts, soit la valeur de y et celle de y' pour un certain x.

Exemples :
Trouver la solution particulière dans les cas suivants :

a) $y'' + \pi^2/9\, y = 0$ avec y(0) = 1 et y(1) = 5

b) y'' + 9 y = 0 avec y(0) = 7 et y'(π/4) = 1

3) Autre écriture des solutions

Soit f(x) = a cos(wx) + b sin(wx), a et b réels non nuls.
Prenons les complexes $z = a + ib = \rho\, e^{i\theta} = \rho \cos(\theta) + i \sin(\theta)$
On a $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ **, cos(θ) = a/ρ et sin(θ) = b/ρ.**

On a donc f(x) = ρ cos(θ) cos(wx) + ρ sin(θ) sin(wx) = ρ (cos(θ) cos(wx) + sin(θ) sin(wx)),

D'où f(x) = ρ cos(wx – θ), ce qui est une autre écriture de la Solution Générale de l'équation différentielle $y'' + w^2y = 0$.

Exemple :
1) Résoudre y'' + 3y = 0
2) Trouver la fonction y telle que y(0) = -1 et y'(0) = $\sqrt{3}$
3) Écrire la solution sous la forme y = ρ cos(wx – θ)

Solution :

1) $y = a\cos(\sqrt{3}\,x) + b\sin(\sqrt{3}\,x)$

2) $-1 = a$

$y' = -a\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\,x) + b\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\,x) = -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\,x) + b\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\,x)$

d'où $y'(0) = \sqrt{3} = b\sqrt{3}$ ce qui donne $b = 1$

Donc $y = -\cos(\sqrt{3}\,x) + \sin(\sqrt{3}\,x)$

3) $\rho=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos(\theta) = -1 / \sqrt{2} = -\sqrt{2} / 2$ et $\sin(\theta) = 1 / \sqrt{2} = \sqrt{2} / 2$, dont on tire que $\theta = 3\pi/4$

On a donc au final $\boldsymbol{y = \sqrt{2}\cos(\sqrt{3}\,x - 3\pi/4)}$.

D) Exercices

9 et 10 page 177
13 et 14 page 178
20 page 179 (contrôle ?)
25 page 181
24 page 180 (contrôle ?)
En groupes : 23 page 179 et 28 page 182

Les équations différentielles – Fiche de révision

Équation y' = ay (a réel quelconque)

Solution générale : $y = k\, e^{ax}$

Une condition initiale permet ensuite de trouver la valeur de k**.**

Équation différentielle y'' + w²y = 0

Solution générale : $y = a \cos(w\, x) + b \sin(w\, x)$

Deux conditions initiales permettent ensuite de trouver la valeur de a **et** b**.**

Autre forme de la solution : $y = \rho \cos(w\, x - \theta)$

avec $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\rho}$ **et** $\sin(\theta) = \dfrac{b}{\rho}$