NOMBRES COMPLEXES (II)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

O. Équations trigonométriques *Corrigé*

Exercice 1 :

a) Les solutions de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\left]-\pi;\pi\right]$, sont : $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.

b) Les solutions de l'équation $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ dans $\left]-\pi;\pi\right]$, sont : $-\dfrac{5\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 2 :

D'après l'exercice 1, le système $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ admet une unique solution dans $\left]-\pi;\pi\right]$: $-\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 3 :

Les solutions de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans **R**, sont : $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près.

Les solutions de l'équation $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ dans **R**, sont : $-\dfrac{5\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$ à 2π près.

Les deux ensembles de solutions étant disjoints, le système d'équations $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ n'admet pas de solutions dans **R**.

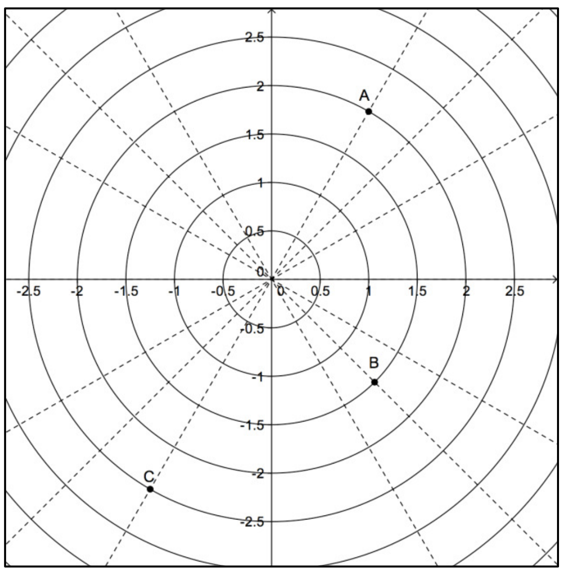
I. Module et arguments *Corrigé*

Exercice 4 :

A a pour affixe a tel que $|a| = 2$ et $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$;

B a pour affixe b tel que $|b| = \dfrac{3}{2}$ et $\arg(b) = -\dfrac{\pi}{4}$;

C a pour affixe c tel que $|c| = 2,5$ et $\arg(c) = \dfrac{4\pi}{3}$.



Exercice 5 :

A a pour affixe a telle que $|a| = 2$ et $\arg a = 0$.

B a pour affixe b telle que $|b| = 2$ et $\arg b = \pi$. ($-\pi$ est aussi un argument de b)

C a pour affixe c telle que $|c| = 2$ et $\arg c = \frac{5\pi}{6}$.

D a pour affixe d telle que $|d| = 3$ et $\arg d = \frac{\pi}{3}$.

E a pour affixe e telle que $|e| = 2$ et $\arg e = -\frac{\pi}{6}$. ($\frac{11\pi}{6}$ est aussi un argument de e)

F a pour affixe f telle que $|f| = 2$ et $\arg f = -\frac{\pi}{2}$. ($\frac{3\pi}{2}$ est aussi un argument de f)

G a pour affixe g telle que $|g| = 3$ et $\arg g = -\frac{2\pi}{3}$. ($\frac{4\pi}{3}$ est aussi un argument de g)

H a pour affixe h telle que $|h| = 3$ et $\arg h = \frac{\pi}{5}$.

Exercice 6 :

A a pour affixe a telle que $|a| = \frac{1}{2}$ et $\arg a = \frac{\pi}{4}$.

B a pour affixe b telle que $|b| = 2$ et $\arg b = \frac{5\pi}{6}$.

C a pour affixe c telle que $|c| = \frac{1}{2}$ et $\arg c = -\frac{\pi}{3}$.

D a pour affixe d telle que $|d| = \sqrt{2}$ et $\arg d = \frac{\pi}{4}$.

E a pour affixe e telle que $|e| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ et $\arg e = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 7 :

Point	Module	Argument	Vrai-Faux ?	Justification :
A	3	$\frac{\pi}{6}$	Faux	un argument de l'affixe de A est $\frac{\pi}{3}$
B	2	$\frac{13\pi}{2}$	Vrai	car $\frac{13\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 3\times 2\pi$
C	2,5	$\frac{2\pi}{3}$	Faux	le module de l'affixe de C est 3
D	-1	$\frac{\pi}{4}$	Faux	D a pour affixe d telle que $|d| = 1$ et $\arg d = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$
E	2	$-\pi$	Vrai	
F	2	$\frac{11\pi}{6}$	Vrai	une autre valeur possible de l'argument est $-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} - 2\pi$
G	1	$-\frac{21\pi}{4}$	Vrai	car $-\frac{21\pi}{4} = -\frac{16\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = -4\pi - \frac{5\pi}{4} = -2\times 2\pi - \left(\frac{5\pi}{4}\right)$
H	-3	$-\frac{11\pi}{6}$	Faux	le module de l'affixe de H est 3
I	2	$\frac{10\pi}{3}$	Faux	le module de l'affixe de I est 3
J	2,5	$\frac{\pi}{2}$	Faux	un argument de l'affixe de J est $-\frac{\pi}{2}$

Exercice 8 :
Dans chacun des cas ci-dessous on peut donner sans calcul le module et l'argument principal, en s'aidant éventuellement d'une figure :

a) $2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ module : 2 argument principal : $\frac{5\pi}{12}$

b) $2i$ module : 2 argument principal : $\frac{\pi}{2}$

c) $-3i$ module : 3 argument principal : $-\frac{\pi}{2}$

d) 1 module : 1 argument principal : 0

e) -2 module : 2 argument principal : π

Exercice 9 :

- $a=1+i\sqrt{3}$

On a : $|a|=\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$ et $a=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Le module de a est 2 et son argument principal est $\frac{\pi}{3}$.

- $b=1-i$

On a : $|b|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

et $b=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Le module de b est $\sqrt{2}$ et son argument principal est $-\frac{\pi}{4}$.

- $c=\sqrt{3}+i$

On a : $|c|=\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ et $c=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Le module de c est 2 et son argument principal est $\frac{5\pi}{6}$.

- $d=\sqrt{3}-i$

On a : $|d|=\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

et $d=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

Le module de d est 2 et son argument principal est $\frac{-\pi}{6}$.

Exercice 10 :

On a : $|z_1|=|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ et

$z_1=-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Le module de z_1 est $\sqrt{2}$ et son argument principal est $\frac{3\pi}{4}$.

On a : $z_2 = i = 1\times(0+1\times i) = 1\times\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Le module de z_2 est donc 1 et son argument principal est $\frac{\pi}{2}$.

On a : $z_3 = -2 = 2(-1+0\times i) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.
Le module de z_3 est donc 2 et son argument principal est π.

On a : $|z_4| = \left|2-2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+4\times 3} = \sqrt{4\times 4} = 4$.

et $z_4 = 2-2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{2}{4} - i\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Le module de z_4 est donc 4 et son argument principal est $-\frac{\pi}{3}$.

Pour le dernier, on transforme d'abord l'écriture : $z_5 = 1+\frac{1}{i} = 1+\frac{1\times i}{i\times i} = 1+\frac{i}{-1} = 1-i$.

On a : $|z_5| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-i)^2} = \sqrt{2}$ et

$z_1 = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Le module de z_5 est $\sqrt{2}$ et son argument principal est $-\frac{\pi}{4}$.

<u>Exercice 11</u> :

On a : $|z| = \left|\frac{1-\sqrt{3}}{2}(i-1)\right| = \left|\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right| |-1+i| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{(-1)^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{2}$ et

$$z = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(i-1) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Le module de z est $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{2}$ et son argument principal est $-\frac{\pi}{4}$.

<u>Exercice 12</u> : $z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ et $z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ sont deux nombres complexes conjugués.

On a $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 1$ et $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Le module de z_1 est donc 2 et son argument principal est $\frac{3\pi}{4}$.

Comme z_2 est le conjugué de z_1, il a le même module, c'est-à-dire 2 et un argument opposé, c'est-à-dire $-\frac{3\pi}{4}$.

II. D'une forme à l'autre *Corrigé*

Exercice 13 :

- $5-5i$

On a $|5-5i|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ et

$$5-5i=5\sqrt{2}\left(\frac{5}{5\sqrt{2}}-i\frac{5}{5\sqrt{2}}\right)=5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

- $-1+i\sqrt{3}$

On a $\left|-1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

et $-1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

- $-2i\sqrt{3}$

On a $\left|-2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{0^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

et $-2i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,(0-i)=2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

- $3+i\sqrt{3}$

On a $\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

et $3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

- $2+\frac{2}{\sqrt{3}}i$

On a $\left|2+\frac{2}{\sqrt{3}}i\right|=\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

et $2+\frac{2}{\sqrt{3}}i=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

- $-4\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=-4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-4i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\frac{\sqrt{2}}{2}-4i\frac{\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

On a $\left|-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right|=\sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{16}=4$

et $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i=4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

- $\frac{\sqrt{6}}{1+i}=\frac{\sqrt{6}\,(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{6}i}{1^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$

On a $\left|\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{3}$

et $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

- $\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2}=\dfrac{2}{4}+\dfrac{2i\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et alors $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

- $\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{i\sqrt{2}}{2}$

On a $\left|\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{6}{4}+\dfrac{2}{4}}=\sqrt{2}$

et $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

<u>Exercice 14</u> :

On a $|z_1|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ et $z_1=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On a $|z_2|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et

$z_2=2\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2}}-i\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

On a $|z_3|=|-2i|=2|i|=2\times1=2$ et $z_3=2(0-1\times i)=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

On a $|z_4|=|3|=3$ et $z_4=3(1+0\times i)=3(\cos 0+\sin 0)=3e^{i0}$.

On a $|z_5|=\sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$ et

$z_5=2\sqrt{3}\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

<u>Exercice 15</u> :

1. On remet sous forme algébrique :

$z_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2(-1+i\times0)=-2$

$z_2=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_3=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_4=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$z_5=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0-i\times1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

2. Le nombre $z_1 = -2(\cos\pi + i\sin\pi)$ n'est pas sous forme trigonométrique car le nombre devant la parenthèse est négatif.

   Par contre, $z_1 = 2(-\cos\pi - i\sin\pi) = 2(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$ est son écriture trigonométrique.

   Le nombre $z_2 = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ n'est pas non plus sous forme trigonométrique car c'est une différence et non une somme.

   Par contre, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ est son écriture trigonométrique.

<u>Exercice 16</u> :

On remet sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique :

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_4 = \sqrt{2}\,e^{i\pi} = \sqrt{2} \times (-1) = -\sqrt{2}$$

$$z_5 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}.$$

<u>Exercice 17</u> : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\dfrac{z_1}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$

   donc $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z_1.

   $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ et $\dfrac{z_2}{|z_2|} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

   donc $-\dfrac{\pi}{3}$ est un argument de z_2.

2. $|\overline{z_1}| = |z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(\overline{z_1}) = -\arg(z_1) + k \times 2\pi = -\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$;

   $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + k \times 2\pi = -\dfrac{\pi}{12} + k \times 2\pi$;

   $\left|\dfrac{1}{z_2}\right| = \dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{1}{2}$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2) + k \times 2\pi = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$;

   $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + k \times 2\pi = \dfrac{7\pi}{12} + k \times 2\pi$.

Exercice 18 :

A et B sont les points du plan d'affixes respectives $z_A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ et $z_B=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-2i$.

$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(z_B-z_A\right)\quad[2\pi]$.

$z_B-z_A=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$;

$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$.

$z_B-z_A=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ donc $\arg\left(z_B-z_A\right)=-\frac{\pi}{3}$.

Donc $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

Exercice 19 :

A , B et C sont les points du plan d'affixes respectives $z_A=-1+i\sqrt{3}$ et $z_B=-1-i\sqrt{3}$ et $z_C=-2$.

$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)\quad[\,2\pi\,]$.

$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-1-i\sqrt{3}+2}{-1+i\sqrt{3}+2}=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{1-3-2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$. D'où $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=-\frac{2\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{2\pi}{3}\quad[2\pi]$.

Exercice 20 :

A , B , C et D sont les points d'affixes respectives $z_A=-i$ et $z_B=3$, $z_C=2+3i$ et $z_D=-1+2i$.

$\left(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}\right)\quad[\,2\pi\,]$.

$\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}=\frac{2+3i+i}{-1+2i-3}=\frac{2+4i}{-4+2i}=\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{(1+2i)(-2-i)}{4+1}=\frac{-2+2-i-4i}{5}=-i$.

On a donc : $\left(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$

Exercice 21 :

a) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-3+i}{-1-3i}=\frac{(-3+i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)}=\frac{-10i}{10}=-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\Leftrightarrow\left|z_C-z_A\right|=\left|z_B-z_A\right|\Leftrightarrow AC=AB$

$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}+k\times2\pi\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}+k\times2\pi$.

Par conséquent, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

b) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$;

De la même façon qu'en a), on montre que : $AB = AC$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + k\times 2\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + k\times 2\pi.$$

Par conséquent, le triangle ABC est équilatéral.

c) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{2+i}{1-2i} = \dfrac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$;

De la même façon qu'en a), on montre que : $AB = AC$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi.$$

Par conséquent, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

d) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} - i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}{1-2i} = \dfrac{\left[\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} - i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\right](1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}i\sqrt{3}}{5} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

De la même façon qu'en a), on montre que : $AB = AC$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} + k\times 2\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{3} + k\times 2\pi.$$

Par conséquent, le triangle ABC est équilatéral.