

Arithmétique et calcul du pgcd



Ch I : Nombres entiers et rationnels

I. Arithmétique

Le mot vient du grec « **arithmos** » qui veut dire *nombre*. En effet, l'arithmétique est la science des nombres entiers naturels. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté \mathbb{N}

1. Divisibilité

Définition :

Soit n un nombre entier naturel

Dire qu'un nombre d est un diviseur de n signifie qu'il existe un nombre ENTIER k tel que $n = d \times k$

Par exemple :

- **5 est un DIVISEUR de 30** signifie que 30 peut s'écrire $5 \times k$ où k est un nombre entier ($30 = 5 \times 6$). On dit aussi : **30 est un MULTIPLE de 5**
- **7 est un diviseur de 70** car 70 peut s'écrire $7 \times k$ où k est un nombre entier ($70 = 7 \times 10$).
dit aussi : **70 est un multiple de 7**



Exercice modèle

Déterminer tous les diviseurs de 36

Pour cela, j'écris de toutes les façons possibles le nombre 36 sous forme d'un produit de 2 entiers naturels :

$$\left. \begin{array}{l} 36 = 1 \times 36 \\ 36 = 2 \times 18 \\ 36 = 3 \times 12 \\ 36 = 4 \times 9 \\ 36 = 6 \times 6 \end{array} \right\}$$

J'en déduis que 36 possède 9 diviseurs qui sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36

Présentation pratique :

1	36
2	18
3	12
4	9
6	6

Rappels de 6eme A CONNAITRE

Un nombre entier est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est pair,

Ex : 168

- **par 5**, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
Ex : 1 265
- **par 10**, si son chiffre des unités est 0,
Ex : 3 540
- **par 3**, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
Ex : 168 car $1 + 6 + 8 = 15$ qui est divisible par 3
- **par 9**, si la somme de ses chiffres est divisible par 9
Ex : 963 car $9 + 6 + 3 = 18$ qui est divisible par 9
- **par 4**, si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.
Ex : 3 540 car 40 est divisible par 4

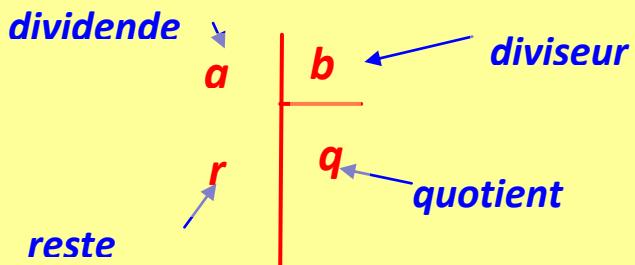
2. Division euclidienne

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels (avec $b \neq 0$).

Effectuer la division euclidienne de a par b ça veut dire trouver les 2 nombres entiers q et r tels que :

$$\begin{aligned} a &= (b \times q) + r \\ r &< b \end{aligned}$$



Exemple : Poser la division euclidienne de 362 par 7

$$\begin{array}{r} 362 \\ - 35 \\ \hline 12 \\ - 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

Cela signifie que $362 = 7 \times 51 + 5$
et $5 < 7$

Les calculatrices collège permettent d'effectuer ces divisions.
On utilise la touche \lfloor ou $: R$ selon les calculatrices

II. Diviseurs communs à 2 nombres entiers

1. PGCD de deux nombres entiers

Définition : Le PGCD de deux nombres entiers est le Plus Grand Commun Diviseur à ces deux entiers.

Exemple : Quel est le PGCD de 12 et de 40 ?

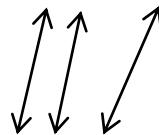
Pour le savoir, je cherche tous les **Diviseurs** de 12 puis ceux de 40 :

1	12
2	6
3	4

Diviseurs de 12 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

1	40
2	20
4	10
5	8

Diviseurs de 40 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ;



Nos deux nombres ont trois **Diviseurs Communs** : 1 ; 2 et 4 . Le **Plus Grand** est 4



Le PGCD de 12 et 40 est donc 4.
On écrit pour aller plus vite : **PGCD (12 ; 40) = 4**

Cela signifie que 4 est le plus grand nombre qui divise à la fois 12 et 40

2. *Algorithmes de calcul du PGCD de deux nombres entiers*



Le mot « **algorithme** » vient d'une déformation du nom du mathématicien perse **al Khwarizmi** (IXème siècle).

Un algorithme est une **succession de manipulations sur les nombres qui s'exécutent toujours de la même façon**.

Méthode 1: algorithme des soustractions successives

Propriété (admise)

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$.

Alors le **PGCD de a et de b** est aussi le **PGCD de b et de $a-b$**

En résumé : **PGCD ($a ; b$) = PGCD ($b ; a-b$)**



Application 1 : calculer le PGCD de 189 et 693

$$\begin{aligned} \text{PGCD (189 ; 693)} &= \text{PGCD (189 ; 504)} \\ &= \text{PGCD (189 ; 315)} \\ &= \text{PGCD (189 ; 126)} \\ &= \text{PGCD (126 ; 63)} \\ &= \text{PGCD (63 ; 63)} \\ &= 63 \end{aligned}$$

CALCULS

$$\begin{aligned} 693 - 189 &= 504 \\ 504 - 189 &= 315 \\ 315 - 189 &= 126 \\ 189 - 126 &= 63 \end{aligned}$$

Application 2 : calculer le PGCD de 2208 et 216

$$\begin{aligned}
 \text{PGCD}(2208 ; 216) &= \text{PGCD}(216 ; 1992) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 1776) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 1560) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 1344) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 1128) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 912) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 696) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 480) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 264) \\
 &= \text{PGCD}(216 ; 48) \\
 &= \text{PGCD}(48 ; 168) \\
 &= \text{PGCD}(48 ; 120) \\
 &= \text{PGCD}(48 ; 72) \\
 &= \text{PGCD}(48 ; 24) \\
 &= \text{PGCD}(24 ; 24) \\
 &= \boxed{24}
 \end{aligned}$$

<u>CALCULS</u>
1992–216 = 1776
1776–216 = 1560
1560–216 = 1344
1344–216 = 1128
1128–216 = 912
912–216 = 696
696–216 = 480
480–216 = 264
264–216 = 48
216–48 = 168
168–48 = 120
120–48 = 72
72–48 = 24
48 – 24 = 24

Le PGCD de 2208 et 216 est 24.

On remarque que la méthode est un peu ..longue

Méthode 2: L'algorithme d'Euclide

Propriété (admise)

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$.

Alors le **PGCD de a et de b** est aussi le **PGCD de b et de r** ,

où r est le reste de la division euclidienne de a par b

en résumé : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$



Application 1 : calculer le PGCD de 189 et 693

$$\text{PGCD}(189 ; 693) = \text{PGCD}(189 ; 126)$$

$$= \text{PGCD}(126 ; 63)$$

= 63 dernier reste non nul

<u>CALCULS</u>
$ \begin{array}{r} 6 \ 9 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 6 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \ 8 \ 9 \\ 1 \ 2 \ 6 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \ 3 \\ 6 \ 3 \\ \hline 2 \end{array} $

Application 2 : calculer le PGCD de 2208 et 216

$$\text{PGCD}(2208 ; 216) = \text{PGCD}(216 ; 48)$$

$$= \text{PGCD}(48 ; 24)$$

$$= 24 \text{ dernier reste non nul}$$

2	2	0	8	2	1	6
			4	4	8	
			4	4	8	
			0	2	4	
				2	4	
				0	2	
				2	2	

Utilisation du tableur avec ces algorithmes.

3. *Nombres premiers entre eux*

Définition

Deux entiers naturels a et b sont **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1

Exemple : 14 et 9 sont premiers entre eux puisque leur PGCD vaut 1.

Cela veut dire que **le seul nombre entier** qui divise ces deux nombres est 1.

II. Nombres rationnels

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels se note \mathbb{Q} .

1. *Fraction irréductible*

Définition :

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**

Exemple : Comme $\text{PGCD}(14 ; 9) = 1$, alors 14 et 9 sont **premiers entre eux** donc $\frac{14}{9}$ est une fraction irréductible.

2. *Règles de calcul sur les fractions*

- **ADDITION et SOUSTRACTION** : il faut d'abord mettre les fractions au même dénominateur. Ensuite on ajoute (ou on soustrait) les numérateurs et on conserve le même dénominateur
- **MULTIPLICATION** : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
- **DIVISION** : on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième.

Exemples :