Arithmétique et calcul du pgcd

Ch I : Nombres entiers et rationnels

I. Arithmétique

*Le mot vient du grec « **arithmos** » qui veut dire nombre. En effet, l'arithmétique est la science des nombres entiers naturels. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$*

1. *Divisibilité*

Définition :
Soit n un nombre entier naturel
Dire qu'un nombre ***d* est un diviseur de *n*** signifie qu'il existe un nombre ENTIER k tel que $\boldsymbol{n = d \times k}$

Par exemple :

- **5 est un DIVISEUR de 30** signifie que 30 peut s'écrire $5\times k$ où k est un nombre entier ($30 = 5\times6$). On dit aussi : **30 est un MULTIPLE de 5**

- **7 est un diviseur de 70** car 70 peut s'écrire $7\times k$ où k est un nombre entier ($70 = 7\times10$). dit aussi : **70 est un multiple de 7**

Exercice modèle
Déterminer tous les diviseurs de 36

Pour cela, j'écris de toutes les façons possibles le nombre 36 sous forme d'un produit de 2 entiers naturels :

$$\left.\begin{array}{l} 36 = 1 \times 36 \\ 36 = 2 \times 18 \\ 36 = 3 \times 12 \\ 36 = 4 \times 9 \\ 36 = 6 \times 6 \end{array}\right\}$$

J'en déduis que 36 possède 9 diviseurs qui sont :1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36

Présentation pratique :

1	36
2	18
3	12
4	9
6	6

Rappels de 6eme A CONNAITRE
Un nombre entier **est divisible** :
- **par 2**, si son chiffre des unités est pair,
  Ex : 16**8**

- **par 5**, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
  Ex : 1 26**<u>5</u>**
- **par 10**, si son chiffre des unités est 0,
  Ex : 3 54**<u>0</u>**
- **par 3**, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
  Ex : 168 car 1 + 6 + 8 = 15 qui est divisible par 3
- **par 9**, si la somme de ses chiffres est divisible par 9
  Ex : 963 car 9 + 6 + 3 = 18 qui est divisible par 9
- **par 4**, si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.
  Ex : 3 5**<u>40</u>** car 40 est divisible par 4

2. *Division euclidienne*

<u>Définition</u>

Soient a et b deux nombres entiers naturels (avec b ≠ 0).

Effectuer la <u>division euclidienne de *a* par *b*</u> ça veut dire trouver les 2 nombres entiers *q* et *r* tels que :

$$\boxed{a = (b \times q) + r}$$
$$\boxed{r < b}$$

dividende

$$\begin{array}{c|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

diviseur

quotient

reste

Exemple : Poser la division euclidienne de 362 par 7

$$\begin{array}{r|l} 362 & 7 \\ \cline{2-2} -35 & 51 \\ \cline{1-1} 12 & \\ -7 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Cela signifie que $362 = 7 \times 51 + 5$
et $5 < 7$

Les calculatrices collège permettent d'effectuer ces divisions.
On utilise la touche $\boxed{\vdash}$ ou $\boxed{:R}$ selon les calculatrices

<u>II. Diviseurs communs à 2 nombres entiers</u>

1. *PGCD de deux nombres entiers*

<u>Définition :</u> Le *PGCD* de deux nombres entiers est le *Plus Grand Commun Diviseur* à ces deux entiers.

Exemple : Quel est le PGCD de 12 et de 40 ?
Pour le savoir, je cherche tous les **Diviseurs** de 12 puis ceux de 40 :

1	12
2	6
3	4

⇒ Diviseurs de 12 : **1** ; **2** ; 3 ; **4** ; 6 ; 12

1	40
2	20
4	10
5	8

⇒ Diviseurs de 40 : **1** ; **2** ; **4** ; 5 ; 8 ; 10 ;

Nos deux nombres ont trois **Diviseurs Communs** : 1 ; 2 et 4 .
Le **Plus Grand** est 4

Le PGCD de 12 et 40 est donc 4.
On écrit pour aller plus vite : **PGCD (12 ; 40) = 4**

Cela signifie que 4 est le plus grand nombre qui divise à la fois 12 et 40

2. *Algorithmes de calcul du PGCD de deux nombres entiers*

*Le mot « **algorithme** » vient d'une déformation du nom du mathématicien perse **al Khwarizmi** (IXème siècle).*
*Un algorithme est une **succession de manipulations sur les nombres qui s'exécutent toujours de la même façon**.*

Méthode 1: algorithme des soustractions successives

Propriété (admise)
Soient a et b deux entiers naturels avec $a>b$.
Alors **le PGCD de a et de b** est aussi **le PGCD de b et de $a-b$**
En résumé : $\boxed{\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a-b)}$

Application 1 : calculer le PGCD de 189 et 693

PGCD (189 ; 693) = PGCD (189 ; 504)
= PGCD (189 ; 315)
= PGCD (189 ; 126)
= PGCD (126 ; 63)
= PGCD (63 ; 63)
= 63

CALCULS
693 – 189 = 504
504 – 189 = 315
315–189 = 126
189–126 = 63

Application 2 : calculer le PGCD de 2208 et 216

PGCD (2208 ; 216) = PGCD (216 ; 1992)
= PGCD (216 ; 1776)
= PGCD (216 ; 1560)
= PGCD (216 ; 1344)
= PGCD (216 ; 1128)
= PGCD (216 ; 912)
= PGCD (216 ; 696)
= PGCD (216 ; 480)
= PGCD (216 ; 264)
= PGCD (216 ; 48)
= PGCD (48 ; 168)
= PGCD (48 ; 120)
= PGCD (48 ; 72)
= PGCD (48 ; 24)
= PGCD (24 ; 24)
= $\boxed{24}$

CALCULS
1992–216 = 1776
1776–216 = 1560
1560–216 = 1344
1344–216 = 1128
1128–216 = 912
912–216 = 696
696–216 = 480
480–216 = 264
264–216 = 48
216–48 = 168
168–48 = 120
120–48 = 72
72–48 = 24
48 – 24 = 24

Le PGCD de 2208 et 216 est 24.
On remarque que la méthode est un peu ..**longue**

Méthode 2: L’algorithme d’Euclide

Propriété (admise)
Soient *a* et *b* deux entiers naturels avec *a* > *b*.
Alors **le PGCD de *a* et de *b*** est aussi **le PGCD de *b* et de *r***,
où *r* est le reste de la division euclidienne de *a* par *b*
en résumé : $\boxed{\text{PGCD } (a\ ;\ b) = \text{PGCD } (b\ ;\ r)}$

Application 1 : calculer le PGCD de 189 et 693

PGCD (189 ; 693) = PGCD (189 ; 126)

= PGCD (126 ; 63)

= 63 dernier reste non nul

CALCULS

693 | 189
126 | 3

189 | 126
63 | 1

126 | 63
0 | 2

Application 2 : calculer le PGCD de 2208 et 216

$$\begin{array}{r|l} 2208 & 216 \\ \cline{2-2} 48 & \\ 48 & 10 \end{array}$$

PGCD (2208 ; 216) = PGCD (216 ; 48)

= PGCD (48 ; 24)

= 24 dernier reste non nul $\longleftrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 48 \\ \cline{2-2} 24 & 4 \end{array}$$

Utilisation du tableur avec ces algorithmes.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 24 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

3. *Nombres premiers entre eux*

Définition
Deux entiers naturels *a* et *b* sont **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1

Exemple : 14 et 9 sont premiers entre eux puisque leur PGCD vaut 1.
Cela veut dire que **le seul nombre entier** qui divise ces deux nombres est 1.

II. Nombres rationnels

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ où *a* et *b* sont des nombres entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

1. *Fraction irréductible*

Définition :
Une fraction **est irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**

Exemple : Comme PGCD(14 ; 9) = 1, alors 14 et 9 sont **premiers entre eux** donc $\frac{14}{9}$ est une fraction irréductible.

2. *Règles de calcul sur les fractions*

- **ADDITION et SOUSTRACTION** : il faut d'abord mettre les fractions au même dénominateur. Ensuite on ajoute (ou on soustrait) les numérateurs et on conserve le même dénominateur
- **MULTIPLICATION** : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
- **DIVISION** : on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième.

Exemples : ….