Première S Problème de synthèse

Barycentres - points alignés - droites concourantes

Partie A

ABC est un triangle, J est le milieu de [AC] et I le barycentre de (B ,-1), (C,3). La droite (IJ) coupe (AB) en K. Le but de la question est de trouver k tel que $\overrightarrow{AK} = k\ \overrightarrow{AB}$.

1) a) Construire I.
   b) Pourquoi C est-il le barycentre de (B,1), (I,2) ?
2) a) En déduire que J est le barycentre de (A,3), (B,1), (I,2)
   b) Déterminer alors le réel k.

Partie B

ABC est un triangle, N est le milieu de [AC] et P et M sont tels que $\overrightarrow{BP} = 2\ \overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$. Le **but** de la question est de démontrer que les points M, N, P sont alignés.

1) Démontrer que N est le barycentre de (A,2) (B,1) (P,1).
2) En déduire que la droite (NP) coupe (AB) en M. Conclure.

Partie C

ABCD est un tétraèdre, I et J sont les milieux respectifs de [AC] et [BC]. K le barycentre de (A,3), (D,-1) et L le barycentre de (B 3), (D,-1). Le **but** de la question est de démontrer que les droites (CD), (LJ) et (KI) sont concourantes.

1) En vous aidant de la partie A :
   a) Démontrer que J est le barycentre de (L,2), (D,1), (C,3)
   b) En déduire que (LJ) coupe (CD) en en un point M et déterminer k tel que : $\overrightarrow{CM} = k\ \overrightarrow{CD}$.
2) a) Démontrer de même que I est le barycentre de (K,2), (D ,1), (C,3).
   b) En déduire que K, I, M sont trois points alignés.

Problème de synthèse

Barycentres - points alignés - droites concourantes

CORRECTION

Partie A

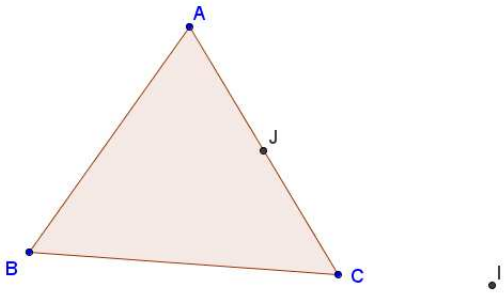
1) a) On a $-\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$-\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Soit : $2\overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{BC}$

Ou encore $\overrightarrow{BI} = 1{,}5\overrightarrow{BC}$

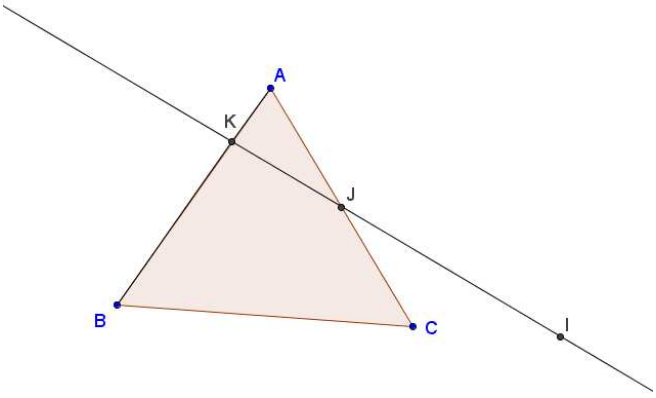


b) De $-\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ on déduit en utilisant la relation de Chasles :

$-\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Soit : $\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CI} = \vec{0}$

Donc C est le barycentre de (B,1), (I,2).



2) a) C est barycentre de (B,1) et (I,2)

J est barycentre (A,1) et (C,1) car J est le milieu de [AC].

Donc, par associativité du barycentre, J est barycentre de (A,3) (B,1) (I,2).

Vérification :

$$3\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BJ} + 2\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{CJ} + (\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{IC})$$

$$= 3(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{CJ})(\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \text{ car C est barycentre de (B,1) (I,2)).}$$

$= 0$ ($\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$ car J est le milieu de [AC])

Donc J est bien barycentre de (A,3) (B,1) (I,2).

b) J est barycentre de (A,3) (B,1) (I,2).

J est barycentre de (K,α) (I,2). Car I, J et K sont alignés.

Donc K est barycentre de (A,3) et (B,1) par associativité du barycentre.

Et par suite, $k = \frac{1}{4}$

<u>Autre solution n'utilisant pas l'associativité du barycentre :</u>

On a $\overrightarrow{BI} = 1{,}5\ \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AK} = k\ \overrightarrow{AB}$

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = -1{,}5\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -1{,}5\ \overrightarrow{BA} - 1{,}5\ \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IK} = 1{,}5\ \overrightarrow{CA} + (k + 0{,}5)\ \overrightarrow{AB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires si :

$\frac{1}{2}(k + 0{,}5) = 1{,}5\ k$

Soit $k = \frac{1}{4}$

Partie B

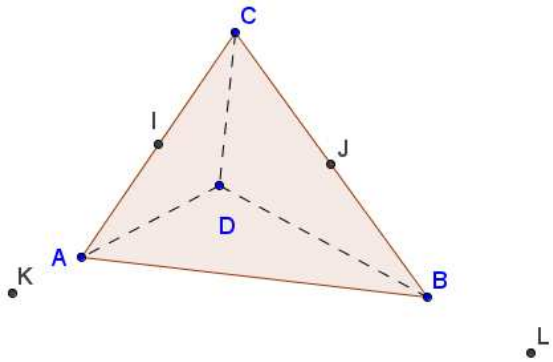
1) N est le barycentre de (A,1) (C,1) car N est le milieu de [AC].

N est le barycentre de (B,1) (P,1) car C est le milieu de [BP].

Par associativité du barycentre, N est le barycentre de (A,2) (B,1) (P,1).

2) Soit Q le barycentre de (A,2) (B,1).
Par associativité du barycentre, N est le barycentre de (Q,3) (P,1).
La droite (NP) coupe donc (AB) en Q.
Q étant le barycentre de (A,2) (B,1), on a $3\ \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB}$
Donc Q = M.
Donc les points M, N, P sont alignés.

Partie C



1) a)

En se plaçant dans le plan BCD : en considérant le triangle BDC et les points J, L on ait dans la même configuration que le triangle ABC et les points J, I de la partie A.

On en déduit directement que :

- B est le barycentre de ((D,1), (L,2)
- J est le barycentre de (C,3), (D,1), (L,2)

b) La question A – 2) b) donne directement $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

2) a) On obtient directement le résultat en se plaçant dans le plan ACD et en considérant les points I, K.

On a également $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ (N étant le point d'intersection des droites (IK) et (CD).

b) On a donc N = M.
Et les trois droites (CD), (IK), (JL) sont donc concourantes en M.
(les points K, I, M sont alignés).