Cours 2 – BARYCENTRES –

1. Définition

Un point pondéré est un couple (A , a) formé d'un point A et d'un coefficient réel a .

2. Barycentre d'un système de plusieurs points pondérés

On se place par exemple dans le cas de trois points pondérés $(A, a) , (B, b) ,(C , c)$

a/ Théorème

Si $a + b + c \neq 0$ alors il existe un unique point G vérifiant $a\ \overrightarrow{GA} + b\ \overrightarrow{GB} + c\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$

.

Démonstration

On prend un point O comme origine .

$a\ \overrightarrow{GA} + b\ \overrightarrow{GB} + c\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ *s'écrit* $a\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}\right) + b\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}\right) + c\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{o}$

puis $(a + b + c)\overrightarrow{OG} = a\ \overrightarrow{OA} + b\ \overrightarrow{OB} + c\ \overrightarrow{OC}$.

Comme $a + b + c \neq 0$ *, on obtient* $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{a + b + c}\left(a\ \overrightarrow{OA} + b\ \overrightarrow{OB} + c\ \overrightarrow{OC}\right)$

ce qui définit un unique point G .

b/ Définition

G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A, a) , (B, b) ,(C , c)$

c/ Formule à retenir

Si G est le barycentre de $(A , a) , (B , b) ,(C , c)$ alors pour tout point O , $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{a + b + c}\left(a\ \overrightarrow{OA} + b\ \overrightarrow{OB} + c\ \overrightarrow{OC}\right)$

d/ Exemples

Ex1 - Soit G le barycentre de $(A , 2) (B , -3) (C , 5)$

- *Pour tout point O , on obtient* $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{2 - 3 + 5}\left(2\ \overrightarrow{OA} - 3\ \overrightarrow{OB} + 5\ \overrightarrow{OC}\right)$

  c'est-à-dire $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{OA} - \dfrac{3}{4}\ \overrightarrow{OB} + \dfrac{5}{4}\ \overrightarrow{OC}$.

- *En prenant A comme origine , on a* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{AA} - \dfrac{3}{4}\ \overrightarrow{AB} + \dfrac{5}{4}\ \overrightarrow{AC}$

  c'est-à-dire $\overrightarrow{AG} = -\dfrac{3}{4}\ \overrightarrow{AB} + \dfrac{5}{4}\ \overrightarrow{AC}$

Ex2 - *On donne trois points A , B , C et G le point défini par* $\overrightarrow{AG} = 3\ \overrightarrow{BC}$.

On peut exprimer G comme barycentre de A , B , C .

En effet , $\overrightarrow{AG} = 3\ \overrightarrow{BC}$ *s'écrit* $\overrightarrow{AG} = 3\ \overrightarrow{BG} + 3\ \overrightarrow{GC}$

puis $\overrightarrow{o} = \overrightarrow{GA} - 3\ \overrightarrow{GB} + 3\ \overrightarrow{GC}$.

c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} - 3\ \overrightarrow{GB} + 3\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$

On voit donc que G est le barycentre de (A , 1) (B , − 3) (C , 3)

3. Propriété d'homogénéité

Si G est le barycentre de (A , a) (B , b) (C , c) alors , pour tout réel k non nul , G est aussi le barycentre de (A , k a) (B , k b) (C , k c) .

- *On ne change donc pas le barycentre en multipliant ou en divisant les coefficients par un même nombre non nul .*

Démonstration

Si G est le barycentre de (A , a) (B , b) (C , c)

alors $a\ \overrightarrow{GA} + b\ \overrightarrow{GB} + c\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$ *avec* $a + b + c \neq 0$.

Par suite , pour tout réel k non nul , on obtient

$ka\ \overrightarrow{GA} + kb\ \overrightarrow{GB} + k\,c\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$ *avec* $ka + k\,b + k\,c \neq 0$.

Ceci montre que G est le barycentre de (A , k a) (B , k b) (C , k c) .

4. Transformation de $a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} + c\ \overrightarrow{MC}$ dans le cas où $a + b + c \neq 0$

a/ Théorème

Dans le cas où $a + b + c \neq 0$, *en notant G le barycentre de (A , a) (B , b) (C , c) , on a*

$a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} + c\ \overrightarrow{MC} = (a + b + c)\ \overrightarrow{MG}$ *pour tout point M .*

Démonstration

En prenant M comme origine , on peut écrire

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a + b + c}\left(a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} + c\ \overrightarrow{MC} \right)$$

ce qui donne bien $a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} + c\ \overrightarrow{MC} = (a + b + c)\ \overrightarrow{MG}$

b/ Exemple

On considère un triangle ABC équilatéral dont les côtés mesurent 4 cm .
On voudrait déterminer l'ensemble E des points M du plan
tels que $\left\| 3\ \overrightarrow{MA} - 2\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 6\ cm$

En utilisant le barycentre G du système (A , 3) (B , − 2) (C , 1) , l'égalité

$\| 3\ \overrightarrow{MA} - 2\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 6\ cm$ *s'écrit* $\| (3 - 2 + 1)\ \overrightarrow{MG} \| = 6\ cm$

puis $\| 2\ \overrightarrow{MG} \| = 6\ cm$ *ce qui revient à* $GM = 3\ cm$.

On voit ainsi que l'ensemble E est le cercle de centre G et de rayon 3 cm .

5. Cas particulier d'un barycentre de deux points pondérés

a/ Formules

On considère le barycentre G d'un système (A , a) (B , b) avec $a + b \neq 0$.

- *G est l'unique point tel que* $\boxed{a\ \overrightarrow{GA} + b\ \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{o}}$
- *Pour tout point O pris comme origine , on a* $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a + b} \left(a\ \overrightarrow{OA} + b\ \overrightarrow{OB} \right)}$
- *Pour tout point M , on a* $\boxed{a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} = (a + b)\ \overrightarrow{MG}}$
- *En prenant A comme origine , on obtient* $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a + b} \left(a\ \overrightarrow{AA} + b\ \overrightarrow{AB} \right)$

  c'est-à-dire $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b}\ \overrightarrow{AB}}$

Cette dernière égalité montre que $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AG}$ *sont colinéaires et par conséquent A , B, G sont alignés .*

On retient ce résultat sous la forme d'un théorème .

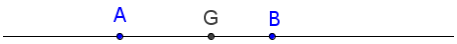
b/ Théorème

Si G est le barycentre de (A , a) (B , b) avec $a + b \neq 0$

alors $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b}\ \overrightarrow{AB}$ *et par suite A , B , G sont alignés .*

c/ Exemples

- Avec $a = 2$ et $b = 3$, $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$



- Avec $a = 5$ et $b = -2$, $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

- Avec $a = -3$ et $b = 5$, $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$

6. Propriété d'associativité

a/ Explication dans le cas de trois points pondérés

On considère un système de trois points pondérés : $(A,a)\,(B,b)\,(C,c)$
On suppose $a+b+c \neq 0$ et $a+b \neq 0$.

On peut donc envisager le barycentre G de $(A,a)\,(B,b)\,(C,c)$
et le barycentre H de $(A,a)\,(B,b)$.

- Le point G est défini par

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o} \qquad \boxed{\text{égalité 1}}$$

- Pour le point H , on a $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{a+b}\left(a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB}\right)$ c'est-à-dire

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = (a+b)\,\overrightarrow{GH} \qquad \boxed{\text{égalité 2}}$$

Avec les égalités 1 et 2 on obtient $(a+b)\,\overrightarrow{GH} + c\,\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$.

Cette dernière égalité signifie que G est le barycentre de $(H\ ,\ a+b\ )\ (\ C\ ,\ c\ )$.

Conclusion :

> Si G est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c)
> et si H est le barycentre de (A,a), (B,b)
> alors G est le barycentre de $(H\ ,\ a+b\ )\ (C\ ,\ c\ )$.

b/ Principe général

> On ne change pas le barycentre G d'un système de points pondérés , lorsqu'on remplace plusieurs points pondérés par leur barycentre H affecté de la somme de leurs coefficients .

c/ Exemple

On considère un triangle ABC .

On note G *le barycentre de* $(A,3)(B,1)(C,-2)$

H *le barycentre de* $(A,3)(B,1)$

K *le barycentre de* $(A,3)(C,-2)$

L *le barycentre de* $(B,1)(C,-2)$

- *D'après la propriété d'associativité , on peut dire que*

  G *est le barycentre de* $(H,4)(C,-2)$

  G *est le barycentre de* $(K,1)(B,1)$

  G *est le barycentre de* $(L,-1)(A,3)$

- *On en déduit que* C,H,G *sont alignés*

  que B,K,G *sont alignés*

  que A,L,G *sont alignés*

Par conséquent G *est à l'intersection des droites* (CH), (BK) , (AL) .

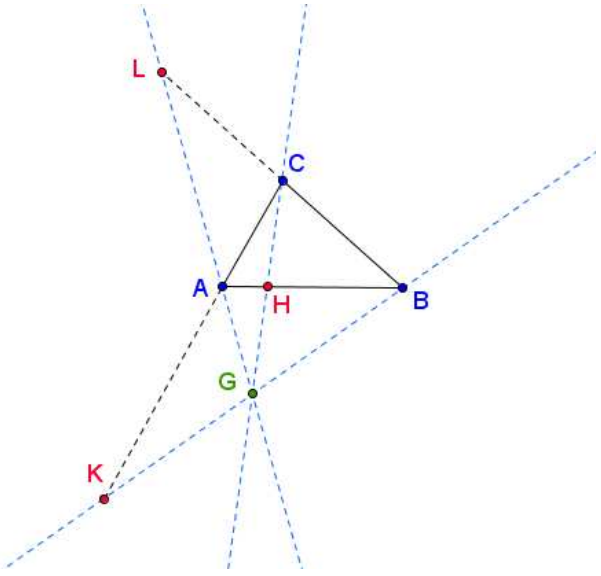
- *Pour réaliser une figure , on commence par préciser les positions de* H,K,L *à l'aide de relations vectorielles :*

H *= barycentre de* $(A,3)(B,1)$ *donc* $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

K *= barycentre de* $(A,3)(C,-2)$ *donc* $\overrightarrow{AK} = \frac{-2}{3-2}\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AC}$.

L *= barycentre de* $(B,1)(C,-2)$ *donc* $\overrightarrow{BL} = \frac{-2}{1-2}\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$

Puis , on construit G *à l'intersection des droites* (CH) , (AK) , (BL) .



7. Isobarycentre

a/ Définition

Le barycentre G de points pondérés (A , 1) , (B , 1) , (C , 1) …. ayant tous le même coefficient 1 , s'appelle l'isobarycentre des points A , B , C , …

b/ Remarque

G est aussi le barycentre de (A , k) (B , k) (C , k) , …. avec k non nul .

c/ Isobarycentre de deux points A et B

L'isobarycentre G de deux points A et B est le barycentre de (A , 1) (B , 1) .
Il est défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. *G est le milieu du segment [AB] .*

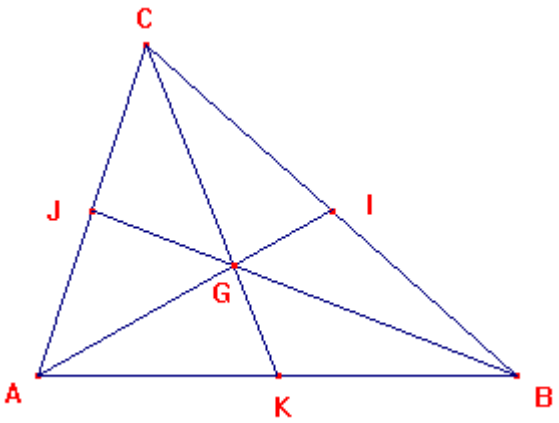
d/ Isobarycentre de trois points A , B , C non alignés

L'isobarycentre G de trois points A , B , C est le barycentre de (A , 1) (B , 1) (C , 1) .
Si l'on note K le milieu de [AB] c'est à dire le barycentre de (A , 1) (B , 1) ,
la propriété d'associativité permet de dire que G est le barycentre de (K , 2) (C , 1) .
On en déduit que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$ *et que G appartient à la médiane (CK)*
du triangle ABC .

Par des explications analogues , en notant I le milieu de [BC] et J le milieu de [AC] ,
on montrerait que G vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$
et que G appartient aux médianes (A I) et (B J) .

En définitive , G est à l'intersection des trois médianes .

G est le centre de gravité du triangle ABC .



8. Coordonnées d'un barycentre

On se place dans un repère $\left(O \; ; \; \vec{i} \; , \; \vec{j} \right)$.

Si G *est le barycentre d'un système* $(A, a)(B, b)(C, c)$ *avec* $a + b + c \neq 0$ *alors, en prenant l'origine* O *du repère, on peut écrire*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a + b + c} \left(a \, \overrightarrow{OA} + b \, \overrightarrow{OB} + c \, \overrightarrow{OC} \right)$$

En passant aux coordonnées, on obtient tout de suite

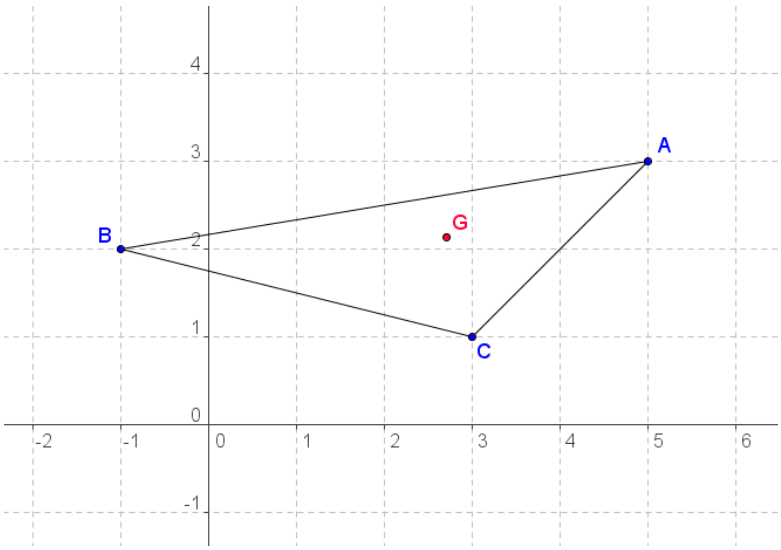
$$x_G = \frac{a \, x_A + b \, x_B + c \, x_C}{a + b + c}$$

$$y_G = \frac{a \, y_A + b \, y_B + c \, y_C}{a + b + c}$$

Exemple :

Avec $A(5 ; 3)$ $B(-1 ; 2)$ $C(3 ; 1)$,

le barycentre G *de* $(A, 3)$ $(B, 2)$ $(C, 2)$ *a pour coordonnées :*

$$x_G = \frac{3 \times 5 + 2 \times (-1) + 2 \times 3}{7} = \boxed{\frac{19}{7}}$$

$$y_G = \frac{3 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1}{7} = \boxed{\frac{15}{7}}$$