FONCTION EXPONENTIELLE

I. RAPPELS : METHODE D'EULER

Si f est une fonction dérivable en x_0, on sait que $f(x_0 + h)$ a pour approximation affine $f(x_0) + f'(x_0)h$
On peut donc sur de "petits" intervalles, approcher la courbe d'une fonction par des "petits" segments.

II. INTRODUCTION, DEFINITION

En physique ou en biologie, on est souvent amené à rechercher et à étudier les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = k\,f$, c'est-à-dire les solutions de l'équation différentielle $y' = k\,y$, k étant un réel fixé.

On peut remarquer qu'aucune des fonctions rencontrées jusqu'à présent (fonction polynômes, fonctions rationnelles, fonction racine carrée, fonctions sinus et cosinus...) ne sont solutions d'une telle équation différentielle.

On s'intéressera plus particulièrement au cas particulier $k = 1$.

Théorème

- Il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
  Cette fonction est notée **exp** et appelée **fonction exponentielle**.
- Pour tous réels k et a, il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = kf$ et $f(0) = a$.
  Cette fonction f est définie par : $f(x) = a \times \exp(kx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 01

On considère un partage de l'intervalle [0 ; 1] en n intervalles de même amplitude ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. *En utilisant les approximations affines et la méthode d'Euler, donner en fonction de n une approximation de $\exp\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\exp\left(\frac{2}{n}\right)$.*
2. *Démontrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est une approximation de $\exp(1)$.*
3. *On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$*

   Donner à 10^{-3} près les valeurs de u_n obtenues avec une calculatrice pour :

   $n = 10$; $n = 100$; $n = 1\,000$; $n = 10\,000$; $n = 100\,000$; $n = 1\,000\,000$
4. *En déduire une valeur approchée de $\exp(1)$.*

1. On sait qu'une approximation affine de $\exp(x_0 + h)$ est $\exp(x_0) + \exp'(x_0)\, h$

   Comme la fonction exponentielle est égale à sa dérivée, on a :
   $\exp(x_0) + \exp'(x_0)\, h = \exp(x_0) + \exp(x_0)\, h = \exp(x_0)\,(1 + h)$

   Une approximation de $\exp\left(\frac{1}{n}\right)$ est donc $\exp(0)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}$

   En réitérant le procédé, on peut écrire que
   $\exp\left(\frac{2}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)$ a pour approximation $\exp\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   Une approximation de $\exp\left(\frac{2}{n}\right)$ est donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

2. $\exp\left(\frac{3}{n}\right) = \exp\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right)$ a pour approximation $\exp\left(\frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$

   on pourait démontrer que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, une approximation de $\exp\left(\frac{k}{n}\right)$ est $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$

   Or, $\exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right)$, on en déduit que exp(1) a pour approximation $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

3. La suite (u_n) étant définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, on obtient

$u_{10} \approx 2{,}594$	$u_{100} \approx 2{,}705$
$u_{1000} \approx 2{,}717$	$u_{10000} \approx 2{,}718$
$u_{100000} \approx 2{,}718$	$u_{1000000} \approx 2{,}718$

4. exp(1) a donc pour valeur approchée 2,718

III. RELATION FONCTIONNELLE, NOTATION e^x

Propriété
Pour tous réels x et y, on a : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Démonstration :

Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y) \neq 0$

Considérons la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$

Les focntions $x \longrightarrow \exp(x + y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors $[\exp(x + y)]' = (x + y)' \times \exp'(x + y) = \exp(x + y)$.

Donc, $g'() = \dfrac{[\exp(x+y)]'}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$

De plus on a $g(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$

g est donc une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$

g est donc la fonction exponentielle

On en déduit que pour tout réel x, $g(x) = \exp(x)$, c'est-à-dire $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$

D'où : Pour tous réels x et y, on a $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Remarques

En appliquant la relation précédente avec $y = x$, on obtient : $\exp(2x) = [\exp(x)]^2$

En appliquant de nouveau la relation avec $y = 2x$, on obtient : $\exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(x) = [\exp(x)]^3$

On peut alors démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $\boxed{\exp(nx) = [\exp(x)]^n}$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = [\exp(1)]^n$

Si on note e le nombre exp(1), alors pour tout entier naturel n , on a : $\boxed{\exp(n) = e^n}$

Définition :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1)$

La fonction exponentielle est alors définie par $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto e^x$

On trouve sur les calculatrices scientifiques une touche correspondant à cette fonction.

Remarques

Le nombre e = exp(1) a pour valeur approchée 2,718 .

La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre exp(2), ces deux nombres étant égaux

Propriétés

a et b étant deux réels et n est un entier relatif on a :

- $e^b > 0$
- $e^{a+b} = e^a.e^b$
- $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

Quelques démonstrations :

- x et y étant deux réels, on a déjà démontré que $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
  Donc pour tous réels a et b on a : $e^{a+b} = e^a.e^b$
- En prenant a = -b, on obtient en particulier $e^{-b+b} = e^{-b}.e^b$ c'est-à-dire $e^0 = e^{-b}.e^b$
  Or on sait que $e^0 = 1$, donc $e^{-b}.e^b = 1$ c'est-à-dire $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$ pour tout $b \in \mathbb{R}^*$
- On peut écrire $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a.e^{-b} = e^a.\dfrac{1}{e^b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

Exercice 02 :

Écrire plus simplement :

1. $e^{2x} \times e^{1-2x}$
2. $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-1}}$
3. $(e^x + e^{-x})^2$
4. $e^{-2x} - \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}$

1. $e^{2x} \times e^{1-2x} = e^{2x+1-2x} = e^1 = e$
2. $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} = e^{2x+3-x+1} = e^{x+4}$
3. $(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2\, e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} + 2\, e^{x-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2\, e^0 + e^{-2x} = e^{2x} + e^{-2x} + 2$
4. $e^{-2x} - \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x}} = e^{-2x} - (e^{2x} + 1) \times e^{-2x} = e^{-2x} - (e^{2x} \times e^{-2x} + e^{-2x}) = e^{-2x} - e^{2x-2x} - e^{-2x} = e^{-2x} - e^0 - e^{-2x} = 1.$

Exercice 03 :

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x - \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$.

1. *Vérifier que pour tout réel x :* $f(x) = x - \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
2. *Puis* $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^{x} + 1}$
3. *Montrer que f est dérivable sur IR, vérifier que :* $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{(e^{x} + 1)^2} = \dfrac{1 + e^{-2x}}{(1 + e^{-x})^2}$

1. La fonction exponentielle étant strictement positive, $e^{x} + 1 \neq 0$ pour tout $x \in$ IR. Donc, $f(x)$ existe pour tout réel x.

$$f(x) = x - \frac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1} = x - \frac{e^{x}\left(1 - \frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1 + \frac{1}{e^{x}}\right)} = x - \frac{e^{x}(1 - e^{-x})}{e^{x}(1 + e^{-x})} = x - \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

2. $x - 1 + \dfrac{2}{e^{x} + 1} = x - \dfrac{e^{x} + 1 - 2}{e^{x} + 1} = x - \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1} = f(x)$.
3. f est la somme et le quotient de fonctions dérivables sur IR, donc f est dérivable sur IR.

$$f'(x) = 1 - \frac{(e^{x} - 1)'(e^{x} + 1) - (e^{x} - 1)(e^{x} + 1)'}{(e^{x} + 1)^2} = 1 - \frac{e^{x}(e^{x} + 1) - (e^{x} - 1)e^{x}}{(e^{x} + 1)^2}$$

$$= 1 - \frac{e^{2x} + e^{x} - e^{2x} + e^{x}}{(e^{x} + 1)^2} = 1 - \frac{2e^{x}}{(e^{x} + 1)^2} = \frac{(e^{x} + 1)^2 - 2e^{x}}{(e^{x} + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^{x} + 1 - 2e^{x}}{(e^{x} + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 1}{(e^{x} + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^{x} + 1)^2} = \frac{e^{2x}(1 + e^{-2x})}{[e^{x}(1 + e^{-x})]^2} = \frac{e^{2x}(1 + e^{-2x})}{e^{2x}(1 + e^{-x})^2} = \frac{1 + e^{-2x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

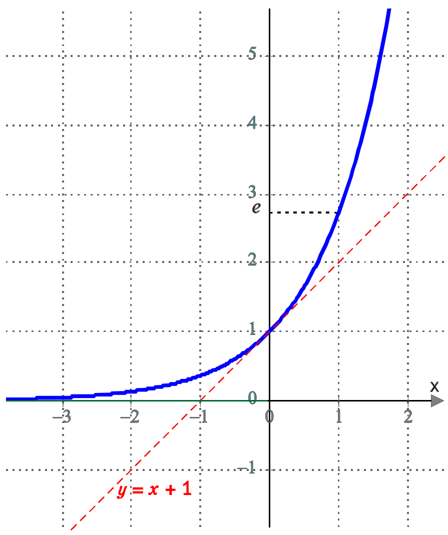
IV. ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriétés

- La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable sur IR et $(e^{x})' = e^{x}$.
- $e^{0} = 1$; $e^{1} = e = 2{,}718$
- pour tout réel x, $e^{x} > 0$
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR.
- $x > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1$ et $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^{x} < 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$
- Le tableau de variations de la fonction exponentielle est :

x	$-\infty$		$+\infty$
exp	0	↗	$+\infty$

Courbe représentative



Exercice 04

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1. $e^{2x} - 1 > 0$
2. $\dfrac{e^{x} + 3}{e^{x} + 1} > 2$
3. $e^{x} - e^{2x} \leqslant 0$
4. $e^{2x+5} < e^{1-x}$

On sait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur IR.On a donc : $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$.

1. $e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow 2x > 0$ car la fonction exp(x) est strictement croissante sur IR
$\Leftrightarrow x > 0$ donc $S =]\,0\,;+\infty\,[$
2. On a $e^{x} > 0$, donc $e^{x} + 1 > 0$.
L'inéquation $\dfrac{e^{x} + 3}{e^{x} + 1} > 2$ est donc définie sur IR et on peut multiplier ses deux membres par $e^{x} + 1$ qui est strictement positif.
$\dfrac{e^{x} + 3}{e^{x} + 1} > 2 \Leftrightarrow e^{x} + 3 > 2e^{x} + 2 \Leftrightarrow 3 - 2 > 2e^{x} - e^{x} \Leftrightarrow e^{x} < 1 \Leftrightarrow e^{x} < e^0 \Leftrightarrow x < 0$
car la fonction exponentielle est strictement croissante sur IR donc, $S =]-\infty\,;0\,[$
3. $e^{x} - e^{2x} \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{x} - (e^{x})^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{x}(1 - e^{x}) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - e^{x} \leqslant 0$ car $e^{x} > 0$
$\Leftrightarrow e^{x} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{x} \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ donc, $S = [\,0\,;+\infty\,[$
4. $e^{2x+5} < e^{1-x} \Leftrightarrow 2x + 5 < 1 - x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur IR
$\Leftrightarrow 3x < -4 \Leftrightarrow x < -\dfrac{4}{3}$ donc, $S =]-\infty\,;\dfrac{4}{3}\,[$

Propriétés

- ► $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$.
- ► e^{x} a pour approximation affine $1 + x$ au voisinage de 0.
- ► $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$
- ► $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\,e^{x} = 0$

C'est-à-dire que, au voisinage de l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur x.

Démonstrations

- ► Soit $f(x) = e^{x}$, $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$
- ► Pour une fonction f dérivable en x_0, l'approximation affine de $f(x_0 + h)$ est $f(x_0) + f'(x_0) \times h$
L'approximation affine de e^h est donc $e^0 + e^0 \times h = 1 + h$
Cela revient à dire que la courbe de la fonction exponentielle a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = x + 1$

Exercice 05

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{x^2-3x-5}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2 + 3e^{-x^2+1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x} - 3}{e^{x} + 2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}+1}{e^{2x}}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3xe^{-x}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+1)e^{x}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2e^{x}-5}{3x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x^3}$
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{3+e^{x}}$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x-5=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2-3x-5}=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+1=-\infty$ or, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+3e^{-x^2+1}=2$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}-3=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}+2=2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}-3}{e^{x}+2}=-\dfrac{3}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to0} e^{x}=e^{0}=1$ donc $\lim\limits_{x\to0} e^{2x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0} e^{x}+1=2$ donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x}+1}{e^{2x}}=2$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{-x}$ conduit à une forme indéterminée

   Or, $xe^{-x}=\dfrac{x}{e^{x}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ donc, .. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{-x}=0$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{x}$ consuit à une forme indéterminée on écrit : $(x+1)e^{x}=xe^{x}+e^{x}$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

   D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{x}=0$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{x}-5}{3x}$ conduit à une forme indéterminée. On écrit : $\dfrac{2e^{x}-5}{3x}=\dfrac{2}{3}\dfrac{e^{x}}{x}-\dfrac{5}{3x}$

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{3x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3}\dfrac{e^{x}}{x}-\dfrac{5}{3x}=+\infty$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x}-1}{x^3}$ conduit à une forme indéterminée. On peut écrire : $\dfrac{e^{x}-1}{x^3}=\dfrac{e^{x}-1}{x}\times\dfrac{1}{x^2}$

   On sait que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ et on a $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x}-1}{x}\times\dfrac{1}{x^2}=+\infty$
9. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}+e^{-x}=+\infty$

   D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+e^{x}=3$ Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{3+e^{x}}=+\infty$

<u>Exercice 07</u>

Résoudre dans IR les équations suivantes :

1. $e^{2x+1}-1=0$
2. $e^{x+1}-e^{2x-3}=0$
3. $e^{x-1}\times e^{3x+5}=1$
4. $e^{2x}+e^{x}-2=0$

1. $e^{2x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
2. $e^{x+1} - e^{2x-3} = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^{2x-3} \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 4$
3. $e^{x-1} \times e^{3x+5} = 1 \Leftrightarrow e^{x-1+3x+5} = e^0 \Leftrightarrow e^{4x+4} = e^0 \Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
4. $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 = 0$
   Si on pose $X = e^x$, l'équation devient $X^2 + X - 2 = 0$. Cette équation a pour solutions $X_1 = 1$ et $X_2 = -2$
   On en déduit que $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = -2$
   On sait que la fonction exponentielle est strictement positive, donc l'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution
   D'autre part $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

Propriétés
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction exp o u $= e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et on a : (exp o u)' = u'.exp o u ou encore $(e^u)' = u'.e^u$

Exercice 07

Justifier que chacune des fonctions est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer la dérivée et étudier son signe.

1. $f(x) = e^{2x^2+1}$
2. $g(x) = (2x + 1)e^{2x+1}$
3. $t(x) = \dfrac{3e^x}{e^{2x} + 1}$

1. f est la composée de la fonction polynôme $2x^2 + 1$ et de la fonction exponentielle qui dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = (2x^2 + 1)'\, e^{2x^2+1}$ donc : $f'(x) = 4x\, e^{2x^2+1}$
   La fonction exponentielle est strictement positive, donc $f'(x)$ est du signe de $4x$
   On a donc $f'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty\,;0[$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]0\,;+\infty[$
2. g est le produit de fonctions dérivables sur donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $g'(x) = (2x + 1)' \times e^{2x+1} + (2x + 1)(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1} + (2x + 1)(2x + 1)'(e^{2x+1}) = 2e^{2x+1} + (2x + 1)(2e^{2x+1})$
   $= 2e^{2x+1}(1 + 2x + 1) = 2(2x + 2)e^{2x+1} = 4(x + 1)e^{2x+1}$
   On sait que la fonction exponentielle est strictement positive, donc $g'(x)$ est du signe de $x + 1$
   $g'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty\,; -1[$ et $g'(x) > 0$ pour $x \in]-1\,;+\infty[$
3. La fonction t le quotient et la composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $e^{2x} - 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Donc, t est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $$t'(x) = \frac{3(e^x)' \times (e^{2x} + 1) - 3e^x \times (e^{2x} + 1)'}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{3(e^x) \times (e^{2x} + 1) - 3e^x \times (2e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{3e^{3x} + 3e^x - 6e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$
   $$t'(x) = \frac{3e^x - 3e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{3e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{3e^x(1 - (e^x)^2)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{3e^x(1 - e^x)(1 + e^x)}{(e^{2x} + 1)^2}$$
   On sait que la fonction exponentielle est strictement positive, donc e^x, $(1 + e^x)$ et $(e^{2x} + 1)^2$ sont strictement positifs pour tout réel x.
   Donc, $t'(x)$ est du signe de $1 - e^x$
   $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. On a donc $t'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty\,;0[$ et $t'(x) < 0$ pour $x \in]0\,;+\infty[$

Exercice 08

1. *Étudier les variations de la fonction f définie par* $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
2. *Dresser son tableau de variations.*
3. *Soit (C) la courbe représentative de f, donner l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0. Tracer (C) et T.*
4. *Démontrer que l'équation* $f(x) = \frac{1}{2}$ *a une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de alpha à 10^{-2} près .*

1. ►On sait que la fonction exponentielle est strictement positive sur IR, donc $e^{2x} + 1 \neq 0$ pour tout $x \in IR$
La fonction f est donc définie sur IR.

►On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{-1}{1}$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

D'autre part, on peut écrire $f(x) = \dfrac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^{2x}(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

►f est somme, quotient et composée de fonctions dérivables sur IR, donc f est dérivable sur IR

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} - 1)'(e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1)(e^{2x} + 1)'}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1)(2e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{2e^{4x} + 2e^{2x} - 2e^{4x} + 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$ pour tout $x \in IR$

On sait que la fonction exponentielle est strictement positive, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in IR$

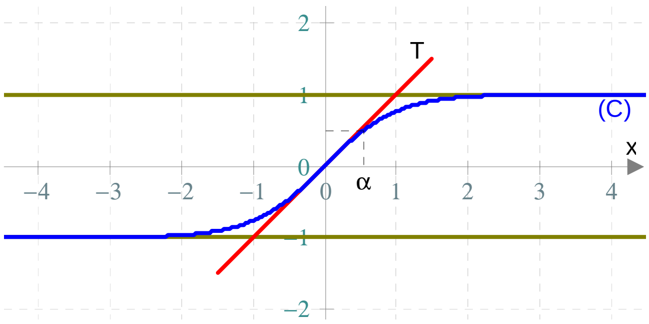
2. On peut alors dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f	-1	↗	1

3. La tangente T à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

avec $f'(0) = \dfrac{4e^0}{(e^0 + 1)^2} = \dfrac{4}{4} = 1$ et $f(0) = \dfrac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 0$

Donc, T a pour équation $y = x$



4. ►La fonction est strictement croissante et continue de ℝ dans $]-1 ; 1[$. Or, $\dfrac{1}{2} \in\ ]-1 ; 1[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur ℝ.

►On peut donner une valeur approchée de alpha en remarquant que $f(0) = 0$ et $f(1) \approx 0{,}76$ et en procédant par la méthode de balayage :
On obtient $f(0{,}54) \approx 0{,}49$ et $f(0{,}55) \approx 0{,}50052$. Comme $0{,}5 \in\ ]0{,}49 ; 0{,}50052[$, alors on peut prendre $\alpha \approx 0{,}55$