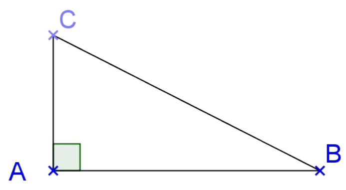
Chapitre 8 : « Théorème de Pythagore et sa réciproque »

I. Rappels : tout sur le triangle rectangle

- **Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit : ABC est rectangle en A.**
- **L'hypoténuse est le côté situé en face de l'angle droit. C'est aussi le côté le plus long.**
- **Les angles aigus sont complémentaires: $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CBA}$ font $90°$.**
- **On rappelle aussi que, dans un triangle quelconque, la somme des trois angles vaut $180°$.**



II. Théorème de Pythagore

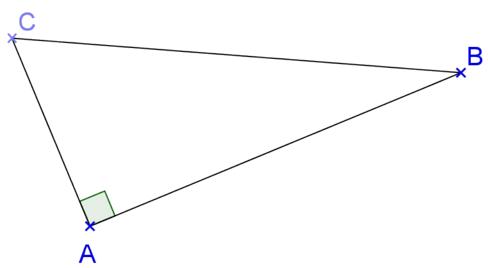
1/ Activité

(A l'oral)

2/ L'énoncé

Configuration

Le théorème de Pythagore s'applique dans un triangle rectangle.



Théorème de Pythagore

Il a deux façons de l'exprimer :

- **Si ABC est un triangle rectangle alors $AC^2 + AB^2 = BC^2$.**

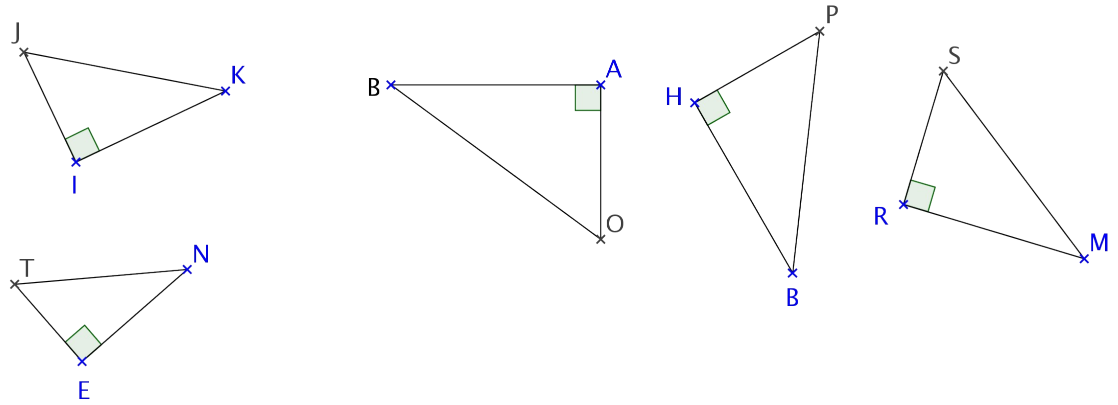
Ou de façon plus générale :

- **Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale à l'hypoténuse au carré.**

Vocabulaire

L'égalité $AC^2 + AB^2 = BC^2$ s'appelle l'égalité de Pythagore.

Savoir donner l'égalité dans un triangle quelconque



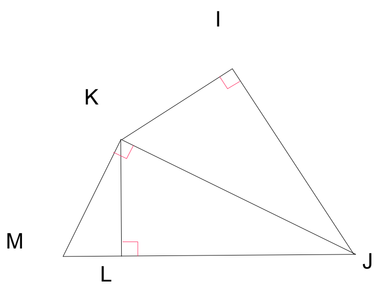
- **Dans IJK : $IJ^2 + IK^2 = JK^2$**
- **Dans ABO : $AB^2 + AO^2 = BO^2$**
- **Dans HPB : $HP^2 + HB^2 = PB^2$**
- **Dans RSM : $RS^2 + RM^2 = SM^2$**
- **Dans TNE : $ET^2 + EN^2 = TN^2$**

A partir d'un énoncé

- **Si TYG a pour hypoténuse $[TG]$ alors $YT^2 + YG^2 = TG^2$.**
- **Si les côtés de l'angle droit d'un triangle sont $[IN]$ et $[KI]$ alors $NK^2 = IN^2 + IK^2$.**

Autre exemple

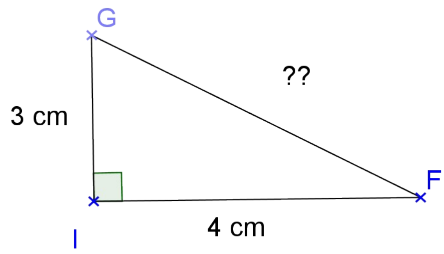
- **Dans IJK rectangle en I : $IK^2 + IJ^2 = KJ^2$**
- **Dans KLJ rectangle en L : $LK^2 + LJ^2 = KJ^2$**
- **Dans KMJ rectangle en K : $KM^2 + KJ^2 = MJ^2$**
- **Dans KLM rectangle en L : $LM^2 + LK^2 = MK^2$**



3/ Application : des exemples à savoir revoir refaire

Exemple type 1

IGF est un triangle rectangle en I tel que $IF=4\,cm$ et $IG=3\,cm$. Quelle est la longueur GF ?



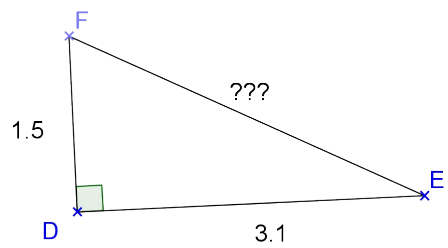
- **1ère étape : « On donne la configuration »**

IGF est rectangle en I, on peut appliquer le théorème de Pythagore.

- **2 ème étape : « On donne l'égalité de Pythagore »**

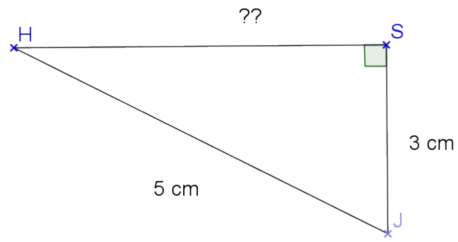
$IF^2+IG^2=GF^2$
$4^2+3^2=GF^2$
$GF^2=25$
$GF=\sqrt{25}$ **« On utilise la touche racine carrée $\sqrt{\ldots}$ »**
$GF=5\ cm$

Autre exemple du même type



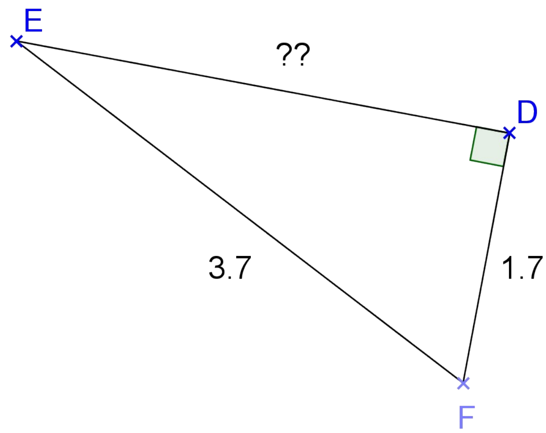
- **EFD est rectangle en D, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore.**
- $DF^2+DE^2=FE^2$
  $1{,}5^2+3{,}1^2=FE^2$
  $FE^2=11{,}86$
- $FE=\sqrt{11{,}86}$
- **La calculatrice donne $3{,}443835072$. On donne une valeur approchée au millimètre près, c'est à dire en gardant un chiffre après la virgule.**
  $FE\approx 3{,}4\ cm$ **(arrondi au dixième ou au millimètre près)**

Exemple type 2



- SHJ est un triangle rectangle en S, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore.
- $SH^2 + SJ^2 = HJ^2$
  $SH^2 + 3^2 = 5^2$
- $SH^2 = 5^2 - 3^2$ « Attention à cette étape »
  $SH^2 = 16$
- $SH = \sqrt{16}$
  $SH = 4\ cm$

Un exemple du même type



- Dans le triangle rectangle EDF, appliquons le théorème de Pythagore :
- $DF^2 + DE^2 = FE^2$
  $1{,}7^2 + DE^2 = 3{,}7^2$
  $DE^2 = 3{,}7^2 - 1{,}7^2$
  $DE^2 = 10{,}8$
- $DE = \sqrt{10{,}8}$
- $DE \approx 3{,}3\ cm$ (la calculatrice donne $3{,}286...$)

4/ A savoir

- **Résoudre une équation du type $x+5^2=32^2$.**
  Le résultat de l'addition est 32^2. Pour trouver le terme manquant, il faut soustraire 32^2 et 5^2 :
  $x=32^2-5^2$
  $x=\ldots$

  De même :
  $3^2+AB^2=15^2$
  $AB^2=15^2-3^2$
  $AB^2=\ldots$

- **Résoudre une équation du type $x^2=81$ ou $x^2=24$.**
  Pour $x^2=81$, on a $x=9$ car $9^2=81$
  Pour $x^2=24$, on ne peut pas calculer de tête : calculatrice !!! $\sqrt{24}\approx 4{,}8989\ldots$
  On donnera une valeur approchée.

- **Les carrés parfaits :** 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225 **…**

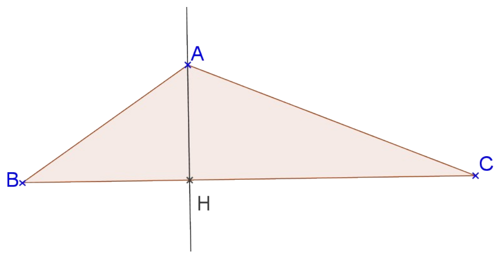
5/ Les figures à angle droit

- **Les carrés, les rectangles.**

- **Les diagonales d'un losange**

- **Le parallélépipède rectangle**

- **Dans un triangle quelconque, en traçant une hauteur, on obtient deux triangles rectangles.**



III. Réciproque du théorème de Pythagore

1/ Activité

Qu'est-ce qu'une réciproque ?

- **On considère une propriété « Si je suis un Homme, j'ai des yeux ».**
- **La propriété réciproque est « Si j'ai des yeux, je suis un Homme ».**

La propriété est vraie, par contre, sa réciproque est fausse.

La propriété de Pythagore : « Si je suis un triangle ABC rectangle en A, $AB^2+AC^2=BC^2$ »
Sa réciproque serait : « Si je suis un triangle ABC tel que $AB^2+AC^2=BC^2$ alors je suis rectangle en A »
On admet que cette réciproque est aussi vraie...

2/ L'énoncé et des exemples types

La réciproque de Pythagore

- **Si dans un triangle, la somme des deux plus petits côtés au carré est égale au carré du côté le plus long alors ce triangle est rectangle.**
- **Si dans un triangle ABC, on peut vérifier que $BA^2+BC^2=AC^2$, alors ABC est rectangle en B.**

Exemple type 1

ABC est un triangle tel que $AB=1{,}5\ cm$; $BC=2\ cm$ et $CA=2{,}5\ cm$. Est-ce que ABC est rectangle ?

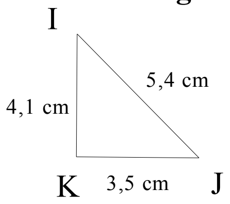
- **1ère étape : « On calcule séparément »**
  $AB^2+BC^2=1{,}5^2+2^2=6{,}25$
  $CA^2=2{,}5^2=6{,}25$

- **2ème étape : « On remarque ... »**
  On remarque que $AB^2+BC^2=CA^2$

- **3ème étape : « Conclusion »**
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, BAC est rectangle en B

Exemple type 2

IJK est un triangle tel que $IJ=5{,}4\,cm$; $JK=3{,}5\,cm$ et $KI=4{,}1\,cm$. Est-ce que IJK est rectangle ?



- **Calculons séparément :**
  $KI^2+KJ^2=4{,}1^2+3{,}5^2=29{,}06$
  $IJ^2=5{,}4^2=29{,}16$

- **On remarque que** $KI^2+KJ^2\neq IJ^2$

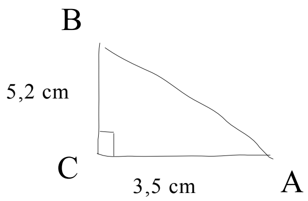
- **Donc le triangle n'est pas rectangle.**

IV. Construction de triangle

1ère construction type

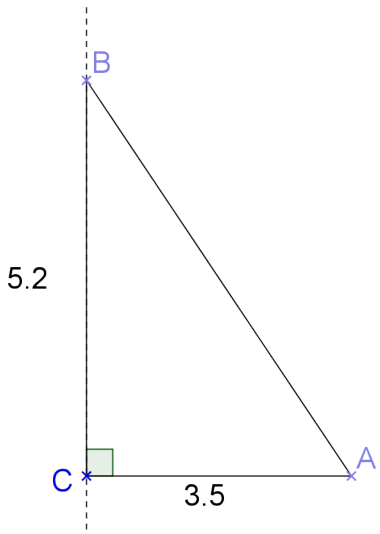
ABC est un triangle rectangle en C tel que $CA=3{,}5\ cm$ et $BC=5{,}2\ cm$.

- **A main levée**



- **En vraie grandeur**

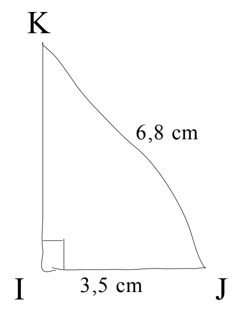
On commence par tracer $[AC]$, on utilise l'équerre pour faire l'angle, enfin, on mesure $5{,}2\ cm$ sur le 2ème côté de l'angle droit.



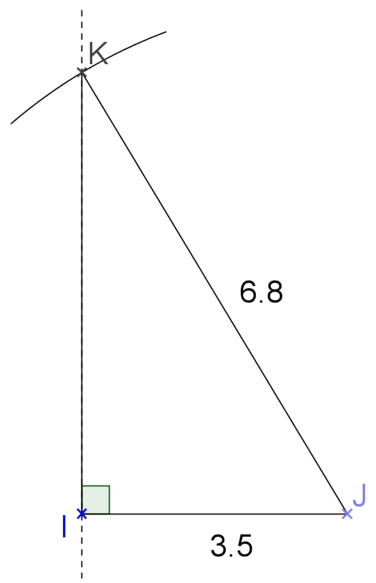
2ème type de construction

On considère un triangle rectangle IJK, rectangle en I, tel que $IJ = 3,5\ cm$ et $JK = 6,8\ cm$.

- **A main levée**



- **En vraie grandeur**



Pour mardi 26 avril

Contrôle 1 h sur le chapitre : Pythagore et sa réciproque
Calculatrice et matériel