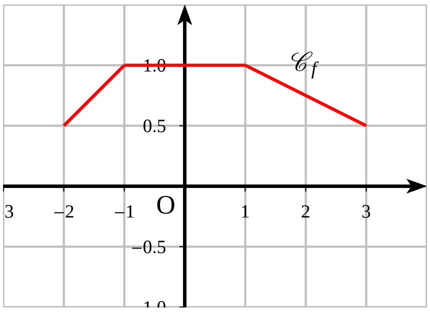
Intégration et primitives

Notion d'intégrale

EXERCICE 1

Pour chaque fonction affine définie par morceaux f, représentée ci-dessous, calculer, en utilisant les aires, l'intégrale I de f sur l'intervalle de définition de f.



EXERCICE 2

Polynésie juin 2013

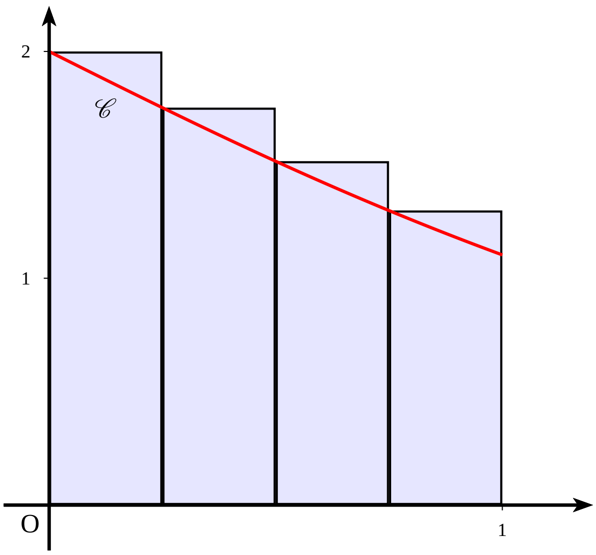
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}\ ;\ 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-contre.



L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme. S'agit-il d'une valeur par excès ou par défaut ?

Variables : I entier et S réel
Entrées et initialisation
  $0 \rightarrow S$
Traitement
  pour I variant de 0 à 3 **faire**
    $S + \dfrac{1}{4} f\left(\dfrac{I}{4}\right) \rightarrow S$
  fin
Sorties : Afficher S

b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question a).

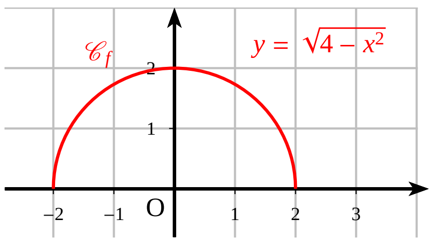
Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits. Faites le calcul pour $N = 100$.

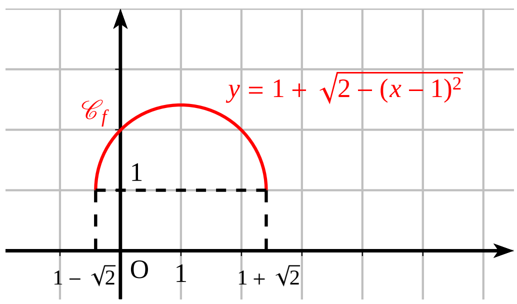
c) Vérifier le résultat en calculant la valeur approchée de l'intégrale de f de 0 à 1. Quelle est l'erreur commise en prenant $N = 4$, valeur trouvée en a).

Exercice 3

Dans chaque cas, la fonction f est représentée par sa courbe $\mathscr{C}_f$, dont une équation est indiquée.

1) Prouver que $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle. Préciser son centre et son rayon.
2) En déduire l'intégrale I de f sur son intervalle de définition. En donner ensuite une valeur approchée puis vérifier le résultat sur votre calculette.





Exercice 4

Les fonctions affines par morceaux f et g sont définies sur l'intervalle $[-1\,;5]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x+3 & \text{si } 0 < x \leqslant 3 \\ x-3 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} & \text{si } 1 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

1) Tracer séparément les fonctions f et g
2) Calculer les intégrales I et J sur $[-1\,;5]$ de f et g.
3) En déduire les intégrales sur $[-1\,;5]$ des fonction $f + 4g$ et $5f - 2g$

Primitive

EXERCICE 5

Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

1) $f(x) = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$; $F(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$; $F(x) = x - \ln(1+e^x)$; $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $F(x) = \ln(\ln x)$; $I =]1; +\infty[$

4) $f(x) = \cos x - x\sin x$; $F(x) = x\cos x$; $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 6

Montrer que les fonction F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

$$F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1} \;;\quad G(x) = \frac{x^2+7x-5}{x-1} \;;\quad I =]1; +\infty[.$$

Calcul de primitive

Pour les exercices de 7 à 13, donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

EXERCICE 7

Linéarité de la primitive

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{3}, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3}, \quad I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1, \quad I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2e^x, \quad I =]0; +\infty[$

EXERCICE 8

Forme $u'u^n$

1) $f(x) = (x+2)^3, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x(1+x^2)^5, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = 2x(3x^2-1)^3, \quad I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin x\cos x, \quad I = \mathbb{R}$

EXERCICE 9

Forme $\dfrac{u'}{u}$

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, \quad I =]4; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, \quad I =]-\infty; 4[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$, $I =]0;1[$

Exercice 10

Forme $\dfrac{u'}{u^n}$, $n \geqslant 2$

1) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}$, $I =]-4;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$, $I = \left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$, $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$, $I =]-1;3[$

5) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$, $I =]-2;+\infty[$

Exercice 11

Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$, $I = \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$, $I =]1;+\infty[$

Exercice 12

Forme $u'e^u$

1) $f(x) = e^{-x+1}$, $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2e^{3x-2}$, $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 13

Forme $u(ax+b)$

1) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1$, $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 14

Pour les exercices suivants , trouver la primitive F, de la fonction f, qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1$, $F(2) = 0$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x$, $F(1) = 0$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$, $F(0) = 0$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{3-x}$, $F(1) = 1$

5) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$, $F(0) = 0$

6) $f(x) = e^{3x+1}$, $F(-1) = 0$

7) $f(x) = xe^{-x^2}$, $F(\sqrt{\ln 2}) = 1$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$, $F(2) = 0$

9) $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

10) $f(x) = \cos x \sin^2 x$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Calcul de primitive plus difficile

Exercice 15

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiquée.

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}$ $I =]-\infty; 1[$

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $I =]-\pi; 0[$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}$ $I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $I =]0; +\infty[$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ $I =]1; +\infty[$

8) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 16

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Déterminer une primitive de f à l'aide de la décomposition proposée

1) $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+1}$ $I = \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. Montrer que $f(x) = a + \dfrac{b}{2x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$ $I =]2; +\infty[$. Montrer que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$

a) $I =]3; +\infty[$ b) $I =]-3; 3[$ c) $I =]-\infty; -3[$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$ $I =]1; +\infty[$. Montrer que $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$

Calcul d'intégrale

Pour les exercices 17 et 18, calculer les intégrales indiquées à l'aide d'une primitive.

Exercice 17

1) $I = \displaystyle\int_0^4 (x-3)\,\mathrm{d}x$

2) $I = \displaystyle\int_{-1}^2 (t^2 - 4t + 3)\,\mathrm{d}t$

3) $I = \displaystyle\int_1^2 \left(t^2 + t - \dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

4) $I = \displaystyle\int_0^2 \dfrac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

5) $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,\mathrm{d}x$

6) $I = \displaystyle\int_0^3 \dfrac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2}$

Exercice 18

1) $I = \int_0^4 \mathrm{d}x$ 3) $I = \int_{-1}^{1} \dfrac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ 5) $I = \int_0^1 5e^{3x}\,\mathrm{d}x$

2) $I = \int_{-2}^{-1} \dfrac{x-3}{x}\,\mathrm{d}x$ 4) $I = \int_1^2 \dfrac{1}{3x-2}\,\mathrm{d}x$ 6) $I = \int_0^1 te^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$

Exercice 19

1) a) Trouver trois réel a, b et c tels que : $\dfrac{4x^2+7x+1}{x+2} = ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

b) En déduire : $I = \int_0^2 \dfrac{4x^2+7x+1}{x+2}\,\mathrm{d}x$

2) a) Prouver que pour tout réel x : $\dfrac{1}{1+e^x} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire : $I = \int_0^1 \dfrac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

Encadrement et valeur moyenne

Exercice 20

Comparer, sans les calculer les réels I et J.

1) $I = \int_1^2 x\,e^x\,\mathrm{d}x$ 2) $J = \int_1^2 x^2\,e^x\,\mathrm{d}x$

Exercice 21

Démontrer les encadrements suivants :

1) $2 \leqslant \int_1^9 \dfrac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant 4$ 3) $\dfrac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \dfrac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$

2) $\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \leqslant 3$ 4) $2e^{-4} \leqslant \int_0^2 \dfrac{1}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

5) $2\ln 3 \leqslant \int_2^4 \ln(x^2-1)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\ln 3 + 2\ln 5$

Exercice 22

On donne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2\,e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$

a) Déterminer une primitive de f.

b) Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[50\,;100]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2}.

Exercice 23

On donne la valeur moyenne $\mu = 2$ d'une fonction f sur l'intervalle $[1\,;4]$.

Déterminer $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 24

Calculer la valeur moyenne μ sur l'intervalle $[-1; 1]$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
(*Indication* : on pourra penser au cercle de centre O et de rayon 1)

Intégrale et suite

EXERCICE 25

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1+t^n)\,\mathrm{d}t$

1) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
2) Est-elle convergente ?

EXERCICE 26

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

1) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
2) La suite (I_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 27

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$

1) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge t-elle ?

   (*Indication* : on montrera que : $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant \dfrac{x}{n+1}$)

Annales

EXERCICE 28

Métropole juin 2012

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$

1) On considère l'algorithme suivant :

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

Variables : N, I entiers U réel
Entrées et initialisation
  Lire N
  $0 \to U$
Traitement
  pour I de 1 à N **faire**
    $U + \dfrac{1}{I} \to U$
  fin
Sorties : Afficher U

2) Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3) Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Démonstrations des conjectures formulées à la partie B

1) Démontrer que pour tout entier strictement positif n : $u_{n+1} - u_n = f(n)$
f est la fonction de la partie A. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2) a) Soit k un entier strictement positif.
Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.
Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \ldots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c) En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3) Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

Remarque : Cette limite s'appelle la constante d'Euler. C'est l'une des constantes les plus importantes de l'analyse avec e et π. Elle est reliée à la fonction *dzéta* ζ de Riemann qui intervient dans l'étude de la répartition des nombres premiers.

Exercice 29

Centres étrangers juin 2012

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2} \mathrm{d}x$

1) a) Soit g la fonction définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

b) En déduire la valeur de I_1.

c) On admet que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_{n+2} = \dfrac{1}{2}e - \dfrac{n+1}{2}I_n$

Calculer I_3 et I_5.

2) On considère l'algorithme suivant :

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ? Quelle est sa valeur ?

Variables : n entier, u réel
Entrées et initialisation
  $1 \to n$
  $\dfrac{1}{2}e - \dfrac{1}{2} \to u$
Traitement
  tant que $n < 21$ **faire**
    $\dfrac{1}{2}e - \dfrac{n+1}{2}u \to u$
    $n + 2 \to n$
  fin
Sorties : Afficher u

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4) Déterminer la valeur de ℓ. On pourra raisonner par l'absurde.

Calcul d'aire

Exercice 30

On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $]0; +\infty[$ par :

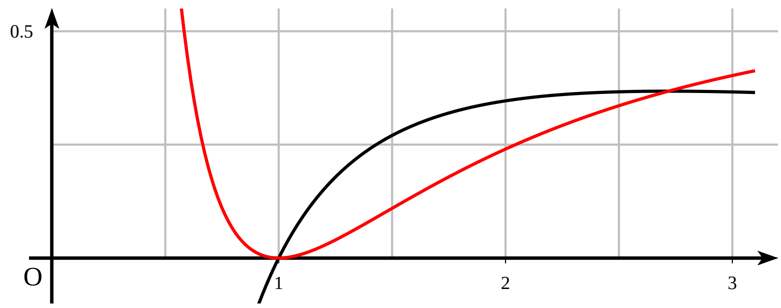
$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbe respectives des fonction f et g.

1) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

2) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3) On a tracé les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Identifier chaque courbe puis déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. L'unité est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 4 cm sur l'axe des ordonnées.



EXERCICE 31

N[lle] Calédonie mars 2012

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = xe^x$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.
Sur la courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-après, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points $\mathrm{A}'(a\ ;\ 0)$ et $\mathrm{B}'(1\ ;\ 0)$.
Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

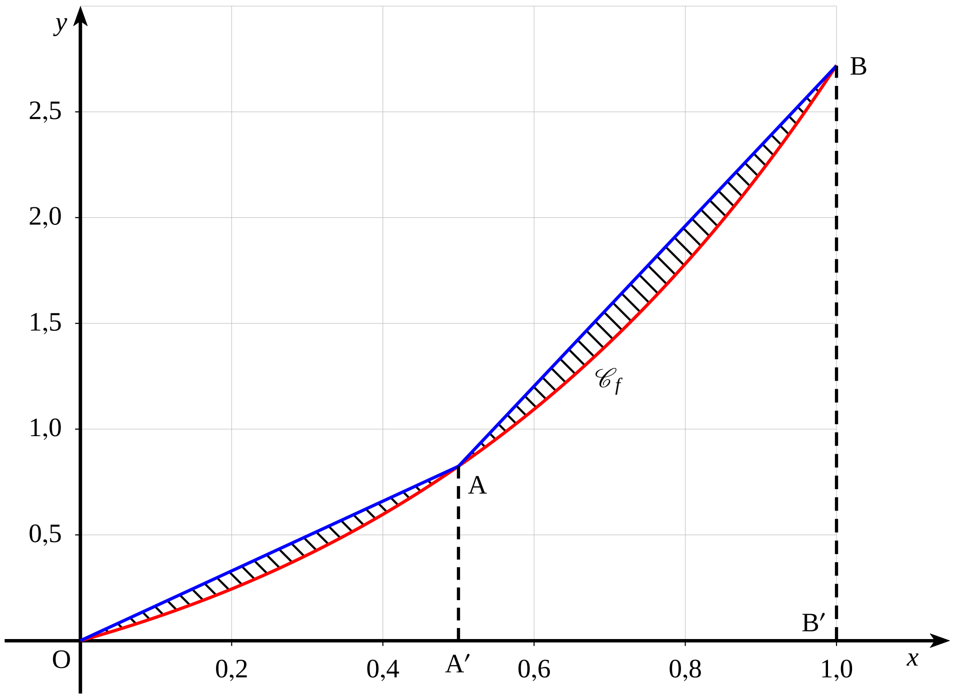
Partie A :

1) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;1]$ par $F(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de f sur $[0\,;1]$. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$.
2) a) Donner l'aire du triangle OAA′ et montrer que l'aire du trapèze ABB′A′ est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2e^a + ae^a - ae + e\right)$.
   b) En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2)$.

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = x\,(e^x - e) + e - 2$

1) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer g'' pour tout réel x de $[0;+\infty[$.
   Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0;+\infty[$ par : $g''(x) = (2+x)e^x$.
2) En déduire les variations de la fonction g' sur $[0;+\infty[$.
3) Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4) En déduire les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.
5) En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.



Exercice 32

Asie juin 2014 : extrait

La longueur L d'une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur ayant une tension minimale aux extrémités, est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)\,\mathrm{d}x$$

Calculer la longueur d'une chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant $1,2$ comme valeur approchée du nombre a.

Exercice 33

Polynésie juin 2014 : extrait

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1) a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

   b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 34

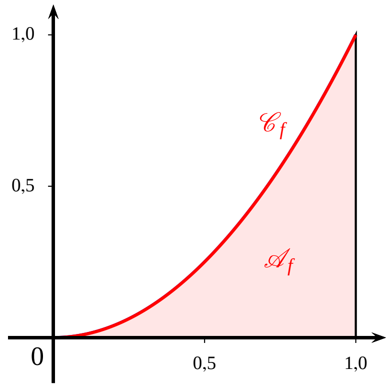
Centre étranger juin 2014 : suite exo 16 du chapitre 6

On s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.
On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_1(x) = xe^{(x^2-1)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$$

1) Calculer $\mathscr{A}_{f_1}$ et $\mathscr{A}_{f_2}$
2) De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?



Exercice 35

Liban mai 2015

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

1) Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$.

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3) a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

```
Variables : i, n  entiers naturels
            u : réel
Entrées et initialisation
    Saisir n
    Affecter à u la valeur ...
Traitement
    pour i variant de 1 à ... faire
        Affecter à u la valeur ......
    fin
Sorties : Afficher u
```

   b) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice et compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9				

   Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4) a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Calcul de volume de solide de révolution

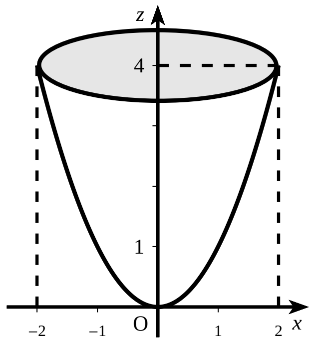
Exercice 36

Volume d'un phare

Calculer le volume V du phare ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$z = x^2$$

$(0 \leqslant x \leqslant 2)$ dans le plan (xOz) ;
unité 6 cm



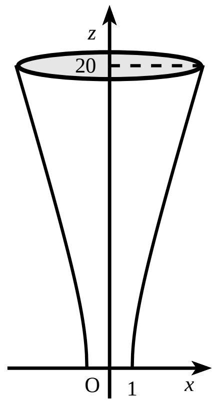
Exercice 37

Contenance d'un château d'eau

L'intérieur d'un château d'eau a la forme du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de (Oz) la branche d'hyperbole définie par :

$$z = 5\sqrt{x^2 - 1}$$

$0 \leqslant z \leqslant 20$. L'unité étant égale à 2 m, calculer la contenance du château d'eau (en hectolitre).



Exercice 38

La trompette

Déterminer le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$y = z^2$$

avec $0 \leqslant z \leqslant 1$