

2018

Classe : TD et TI

02/12/2017

Durée : 4h

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUESExercice 1 (1,5 pt)Linéariser $\sin^4 x$

(1,5 pt)

Exercice 2 (4 pts)1.a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$

(1 pt)

1.b) En déduire les limites suivantes

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x}$

(1 pt)

2) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

(1 pt)

b) Calculer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$

(1 pt)

Exercice 3 (6,5 pts)A/ On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 1) Calculer z^2

(1 pt)

2) Déduire le module et un argument de z

(1 pt)

B. on considère le polynôme P défini dans \mathbb{C} par $P(z) = z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-5i)z + 16 - 16i$ 1) Montrer que P admet une racine réelle

(1 pt)

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$

(1,5 pt)

Les solutions seront notées z_1, z_2 et z_3 avec $|z_1| < |z_2| < |z_3|$ 3) Montrer que z_1, z_2 et z_3 dans cet ordre sont les termes d'une suite géométrique. (1 pt)4) Donner en justifiant la nature de la suite formée par $|z_1|, |z_2|, |z_3|$ pris dans cet ordre. (1 pt)Exercice 4 (2 pts)Soit (o, \vec{u}, \vec{v}) un repère orthonormé $A(1+i) \quad \vec{u}(\frac{-3}{2})$ a) Détermine l'écriture complexe d'une rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{4}$ (0,75 pt)

- b) Déterminer l'écriture complexe d'une translation t qui a pour vecteur de translation \vec{u} (0,5 pt)
- c) Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe de centre A de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (0,75 pt)

Exercice 5 (6 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

A/ On considère la similitude plane directe S qui laisse le point $A(-i)$ invariant et qui transforme $B(4+i)$ en $C(1+2i)$

- 1.a) Donner l'écriture complexe de S (1 pt)
- 1.b) En déduire les éléments caractéristiques de S (0,75 pt)
- 1.c) Donner l'écriture analytique de S (1 pt)
- 2.a) Déterminer l'ensemble (η) des points M d'affixe z tels que $|z-1-2i|=|z-4-i|$ (0,75 pt)
- .b) Donner la nature et une équation cartésienne de l'image de (η) par S . (0,5 pt)

B/ on désigne par f l'application du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1-i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$

- 1) Trouver les images par f des points $E(i)$ et $F(\sqrt{3})$ (0,5 pt)
- 2) Déterminer :
- 2.a) La nature et les éléments caractéristiques de f (0,75pt)
- 2.b) L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant : $|(1-i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$ (0,75 pt)