LYCEE DU MANENGOUBA **Année scolaire 2016-2017**

Département de Mathématiques **Evaluation de la 3è séquence**

Niveau : TleC ; Durée : 3h ; coef :5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB : l'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages.

Exercice 1 : **4.5 points.**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(o,\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre de complexe $z_o = 1 + i\sqrt{3}$.

1°) Soit r l'application du plan dans lui-même qui à tout points M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{2}iz$.

On définit la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $M(z_0)\ et\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = r(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n

a) Exprimer z_{n+1}en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n. 0.75pt
b) Déterminer la distance OM_n en fonction de n. 0.5pt
c) Exprimer M_nM_{n+1} puis $Ln = \sum_{k=o}^{n} M_kM_{k+1}$ en fonction de n.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} Ln$. 1pt
d) Soit $\alpha_n = argz_n$, montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison puis exprimer α_n en fonction de n. 1pt

2°)a) Déterminer la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM_n}}\right)$ en fonction de n. 0.5pt

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles O , M_0 et M_n sont alignés. 0.75pt

Exercice 2 : **7.25 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{4x^2+1}$, (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). Soit v la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$ et F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$.

I. ***Etude de f***: ***3.5 points***

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1pt
2. Calculer $f(\frac{1}{2})$ puis construire (C). 0.75pt
3. Démontrer que v est une bijection de $]-\infty; 0]$ vers un intervalle J que l'on précisera.
4. Construire dans le même repère la courbe (C') de f^{-1}. 0.5pt
5. Préciser l'intervalle K sur lequel v^{-1} est dérivable et calculer $(v^{-1})'\left(\frac{1}{5}\right)$ puis écrire une équation de la tangente à (C') au point d'abscisse $\frac{1}{5}$. 1pt

II. ***Etude de F*** : ***4 points***

1. Démontrer que la fonction $u: x \mapsto -F(-x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que F est impaire. 1pt
2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = F\left(-\frac{1}{4x}\right)$.
   a. Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. 0.5pt
   b. En déduire que pour x de $]0;+\infty[$, $F(x) = 2F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(-\frac{1}{4x}\right)$. 0.5pt
3. On désigne par h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, par :$h(x) = F(\frac{1}{2}tanx)$.
   a. Déterminer la fonction dérivée de h. 0.5pt
   b. En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{1}{2}x$. 0.75pt
   c. Calculer $F(\frac{1}{2})$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. 0.75pt

Problème : 8.25 points

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 de base $B = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $m \in \mathbb{R}$ et f_m l'endomorphisme de E défini par

$$f_m(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}\ ;\ f_m(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{k};\ \ f_m(\vec{k}) = 2m\vec{\jmath} + 3\vec{k}.$$

1°) Déterminer la matrice A_m de f_m dans la base B. 0.5pt

2°) a) Déterminer la valeur de m pour laquelle f_m n'est pas un automorphisme. 0.75pt

3°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \left\{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E, f_m(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\right\}$

a) Montrer que E_λ est un sous espace vectoriel de E. 1pt

b) Dans cette question $m = -\frac{1}{2}$. On pose $g = f_{-\frac{1}{2}}$

i) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $E_\lambda \neq \{\vec{0}\}$. 1.5pt

ii) Déterminer une base de E_2, on la notera $\vec{u}_1$

iii) On considère les vecteurs $\vec{u}_2 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}$ et $\vec{u}_3 = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$.

- Prouver que $\vec{u}_2 \in E_3$ et que $\vec{u}_3 \in E_{-1}$. 0.5pt
- On admet que $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E , écrire la matrice de g dans cette base. 0.5pt

iv) Déterminer la matrice $A'\ de\ g^{-1}$ dans la base B'. En déduire l'expression analytique g^{-1} dans la base B' 1pt

4) Dans cette question $m = \frac{1}{2}$ et on pose $f_{\frac{1}{2}} = h$.

a) Déterminer $Kerh$ et $\mathcal{J}mh$, on précisera une base de chacun. 1.5pt

b) Montrer que $Kerh$ et $\mathcal{J}mh$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E. 1pt