MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
21.11.2017	EXAMEN	SEQUENCE N° 2	Durée : 4h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	EPREUVE	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : **4 points**

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$, unité graphique $1cm$.
On considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=3\vec{v}$ et C tel que $ABCD$ soit un rectangle. *On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.*

1. Déterminer l'affixe z_E de E, image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. **0,5pt**
2. Déterminer les réels a,b tels que $F=bar\left\{(A,a),(B,b),(C,1)\right\}$ et $z_F=6-i$. **0,5pt**
3. On considère la similitude directe S qui transforme A en E et B en F. A tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z', image de M par S.
   - **(a)** Montrer que $z'=(1+i)z+4-3i$. **0,5pt**
   - **(b)** Déterminer le centre I, l'angle θ et le rapport k de la similitude S. **0,75pt**
   - **(c)** Déterminer S (C) et S (D). **0,5pt**
   - **(d)** Calculer l'aire de l'image par S du rectangle $ABCD$. **0,25pt**
4. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\|6\overrightarrow{MA}-10\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=9$. **0,5pt**
5. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques , l'image de Γ par S. **0,5pt**

EXERCICE 2 : **3,5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points : $A(-1;2;1)$, $B(1;-6;-1)$, $C(2;2;2)$, $I(0;1;-1)$, $J(-2;0;0)$ et $K(1;0;1)$.

1. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. **0,5pt**
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) contenant les points A,B,C. **0,5pt**
3. Soit (Q) le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$ et (Q_0) le plan de repère $\left(O,\vec{i},\vec{k}\right)$.
   - **(a)** Pourquoi (Q) et (Q_0) sont-ils sécants ? **0,5pt**
   - **(b)** Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $(\Delta)=(Q)\cap(Q_0)$ **0,5pt**
4. Ecrire une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de centre I et de rayon 2. **0,5pt**
5. Déterminer avec soin l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite (JK). **1pt**

EXERCICE 3 : **2,5 points**

1. **(a)** Montrer que l'équation $x^2\equiv 3[7]$, dont l'inconnue $x\in\mathbb{Z}$,n'a pas de solution. **0,5pt**
   - **(b)** Montrer que pour tous $a,b\in\mathbb{Z}$, si 7 divise a^2+b^2 alors 7 divise a et b. **0,75pt**
2. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
   - **(a)** Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x+\sqrt{3}y-2z=0$ et $2x-z=0$ ne sont pas parallèles et donner une représentation paramétrique de $\Delta=P\cap Q$. **0,75pt**
   - **(b)** Soit Γ le cône de révolution d'équation $y^2+z^2=7x^2$. Soit $a,b,c\in\mathbb{Z}^*$. Montrer que si $A(a,b,c)\in\Gamma$, alors a,b et c sont divisibles par 7. **0,5pt**

PROBLEME : 10 points

PARTIE A : 2,5 points

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. **(a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. **0,5pt**

   (b) Ecrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle. **0,5pt**

2. On désigne par a le nombre complexe de module 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.

   (a) Calculer a^2 sous forme algébrique. **0,25pt**

   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. **0,5pt**

3. **(a)** Démontrer que si z est solution de (E), alors $\overline{z}$ l'est aussi. **0,25pt**

   (b) En déduire dans $\mathbb{C}$ toutes les solutions de l'équation (E). **0,5pt**

PARTIE B : 3 points

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les plans (P) et (π) d'équations cartésiennes respectives : $10x + 15y + 6z = 73$ et $z = 3$.

1. Soit $M(x, y, z) \in (P) \cap (\pi)$. On suppose que x, y et z appartiennent à $\mathbb{Z}$.

   (a) Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation $(E) : 2x + 3y = 11$. **0,25pt**

   (b) Vérifier que le couple $(7, -1)$ est solution de (E), puis résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$. **0,75pt**

   (c) Déterminer tous les points M dont les coordonnées sont des entiers naturels. **0,5pt**

2. Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

   (a) Montrer que y est impair. **0,5pt**

   (b) Montrer que $x \equiv 1[3]$. **0,25pt**

   (c) On pose alors $x = 1 + 3p, y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$ où $p, q, r \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $M(x, y, z) \in (P)$ si et seulement si $p + q + r = 1$. **0,25pt**

   (d) Déterminer tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels. **0,5pt**

PARTIE C : 4,5 points

C1) Soit la fonction f définie sur $I =]-1;1[$ par $f(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1. Etudier les variations de f. **0,5pt**

2. **(a)** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$. **0,5pt**

   (b) Vérifier que $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$ et que $\sqrt{1 - \alpha^2} = \dfrac{\alpha}{1 + \alpha}$. **0,5pt**

   (c) Donner le signe de $f(x) - x$ sur I. **0,5pt**

3. **(a)** Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. **0,5pt**

   (b) Tracer les courbes Γ et Γ^{-1} respectivement de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (unité graphique 2cm) **0,5pt**

C2) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $g(x) = \tan\dfrac{x}{2}$.

1. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $g^{-1}(1)$. **0,75pt**

2. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$. **0,75pt**