COLLEGE FRANCOIS XAVIER VOGT
Département de mathématiques

Année scolaire 2017-2018
Classe : TD & TI
Durée : 4h

MINI-SESSION DE FEVRIER 2018
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (4,25 points)

A. Résoudre dans IR

a) $\ln(5x+2)-\ln(x+2)=\ln(x-2)$ **(0,75 pt)**

b) $\ln|x-1|+\ln|2x+1|=0$ **(0,75 pt)**

c) $(1-\ln x)(3+\ln x)\geq 0$ **(1pt)**

B. On donne la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$

1) Justifie que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f'(x) **(0,75 pt)**

2) Déduire une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction ln **(1 pt)**

EXERCICE II (2 POINTS)

a) Linéariser $\sin^4 x$ **(1 pt)**

b) Déduire la primitive de la fonction f : $x\to\sin^4 x$ qui prend la valeur o en $\frac{\pi}{4}$ **(1 pt)**

EXERCICE 3 (4 POINTS)

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

Soit l'équation : $2z^2+(\sqrt{3}-i)z+1-i\sqrt{3}=0$

1) Calculer $(\sqrt{3}+i)^2$ **(0,5 pt)**

2) Résoudre l'équation (E). Mettre ses solutions sous forme algébrique et exponentielle. **(1 pt)**

3) Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A=i$ et $z_B=e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

Soit r la rotation de centre o et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et C l'image de B par r.

a) Déterminer l'écriture complexe de r. **(0,75 pt)**

b) Déterminer l'affixe du point C **(0,75 pt)**

4) Soit D le point d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

a) Déterminer $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ **(0,5 pt)**

b) Déduire la nature du triangle ABD. **(0,5 pt)**

PROBLEME

Les deux parties sont indépendantes

PARTIE A (7,25 POINTS)

I/ Soit g la fonction définie sur IR_+^* par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1) Dresser le tableau de variation de g **(1 pt)**
2) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans IR_+^*. Montrer que 0,2<α<0,3 **(0,5 pt)**
3) Déduire le signe de g sur IR_+^* **(0,5 pt)**
4) Établir que $\ln\alpha = -\alpha - 1$ **(0,25 pt)**

II/ On considère la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur IR+ **(0,75 pt)**

2.a) Étudier la dérivabilité de f en 0 **(0,75 pt)**

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent. **(0,25 pt)**

3) Déterminer la limite de f en $+\infty$ **(0,5 pt)**

4) Exprimer $f'(x)$ en fonction de g(x) **(0,5 pt)**

5) Dresser le tableau de variation de f **(1 pt)**

6) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ **(0,25 pt)**

7) Représenter graphiquement la courbe de f **(1 pt)**

(unité sur les axes : 5 cm) ***Prendre*** $\alpha \approx 0,3$*)*

PARTIE B (2,5 POINTS)

1) Soit n un entier naturel résoudre l'équation $\ln(7^n \times x) = 2n$ **(1 pt)**

2) On considère la suite v définie par $\ln(7^n \times v_n) = 2n$

a) Calculer v_0 **(0,5 pt)**

b) Montrer que v est une suite géométrique donc vous déterminerez la raison **(1 pt)**