Collège Mgr F. X. VOGT **Année scolaire 2017 - 2018**

MINI – SESSION DE FEVRIER 2018

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : TC **Durée : 4h n**

Exercice 1 : 4 points

On considère les fonctions f, F et H définies sur $[1, +\infty[$ par $f(x = \frac{x}{e^x-1}$ et $F(x = \int_1^x f(t)dt$ et

$H(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

1) a) Justifier que f et H sont bien définies sur $[1, +\infty[$. **0,5pt**

b) Quelle relation existe-t-il entre F et f? **0,25pt**

c) Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Donner une interprétation graphique du nombre F(3). **0,25pt**

2) On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre F(3).

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x-1} = x\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. **0,5pt**

b) En déduire que $\int_1^3 f(t)dt = 3\ln(1-\frac{1}{e^3}) - \ln(1-\frac{1}{e}) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx$. **0,75pt**

c) Montrer que si $1 \le x \le 3$, alors $\ln(1-\frac{1}{e}) \le \ln(1-e^{-x}) \le \ln(1-\frac{1}{e^3})$. **0,5pt**

d) En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx$, puis de F(3). **0,5pt**

3) Montrer que la fonction H est dérivable sur $[1, +\infty[$, puis déterminer sa dérivée. **0,75pt**

Exercice 2 : 3,5 points

A/ Dans chacune des questions suivantes, trois ou quatre réponses vous sont proposées, mais une seule est juste. Recopier le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse juste. **0,5pt× 2 =1pt**

1)

Si $z = 1 + e^{i2\theta}$, alors a) $\arg(z) = 2\theta$ b) $\arg(z) = \theta$ c) $z = 2e^{i\theta}\cos\theta$ d) $|z| = |2\cos\theta|$

2)

Si $f(x) = \ln(\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|)$, alors a) f est paire b) f est impaire c) f n'est ni paire ni impaire.

B/ Calculer les intégrales suivantes : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2 dx$. **1pt**

C/ On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 4y + 5y = 5x + 1$:(E). Après avoir déterminé une fonction affine g solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E), puis donner sa solution f qui vérifie $f'(0) = 0$ et $f(0) = -2$. **1,5pt**

Exercice 3 : 5,5 points

I/ Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à10^{-4}. Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

Partie A : On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'évènement «la personne est contaminée par le virus» et T l'évènement «le test est positif». $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. a) Préciser les valeurs des probabilités P(V), $P_V(T)$ et $P_{\overline{V}}(\overline{T})$. **0,5pt**

b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$. **0,25pt**

2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492. **0,5pt**

3. a) Justifier par un calcul la phrase : «Si le test est positif, il y a au moins 40% de «chances» que la personne soit contaminée». **0,5pt**

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. **0,25pt**

Partie B: On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. **0,5pt**

2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10. **0,5pt**

II/ Une urne contient 5 boules rouges, 4 vertes et 2 jaunes toutes indiscernables au toucher.

1) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) Obtenir des boules unicolores. **0,25pt**

b) Obtenir exactement deux boules rouges. **0,5pt**

c) Obtenir au moins une boule jaune. **0,5pt**

2) Reprendre la question précédente en supposant que les trois boules sont tirées successivement et avec remise. **1pt**

<u>Problème</u> : 7 points

Partie A : On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$.

1) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau des variations. **0,75pt**

2) Justifier qu'il existe un unique réel α dans $]0,8\,;\,0,9[$ tel que $g(\alpha) = 0$. **0,5pt**

3) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$. **0,5pt**

Partie B : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les limites de la fonction f à droite en 0 et en $+\infty$. **0,5pt**

2) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est une asymptote la courbe (C). Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ). **0,75pt**

3) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$, puis justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$. **0,75pt**

4) En déduire le tableau de variations de la fonction f. **0,5pt**

5) Tracer la courbe (C) dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unités : 2cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées. **1pt**

Partie C : Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine (D) du plan compris entre la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1) Justifier que cette aire, exprimée en cm², est donnée par : $I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. **0,25pt**

2. a) Calculer l'intégrale $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties. **0,75pt**

b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3) Calculer la limite de la suite I_n , puis donner une interprétation graphique de cette limite. **0,75pt**