ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

3ème Mini-session

EXERCICE 1 : 5pts

Soit E l'ensemble des triplets (a, b, c) d'entiers naturels tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

1. Montrer que :
   a) E est non vide
   b) Tout triplet d'entiers naturels (x, y, z) tel que x, y et z sont respectivement proportionnels à 3, 4 et 5 est un élément de E **0.25pt**
2. Soit (x, y, z) un élément de E **0.5pt**

a)Quels sont les restes possibles du carré d'un entier naturel dans la division par 3 ? par 4 ? par 5 ? **1.75pt**

b)Montrer que x et y ne peuvent être simultanément impairs. **0.5pt**

c)Montrer que le produit xyz est un multiple de 3, de 4 et de 5 **1.5pt**

d)En déduire que le produit xyz est un multiple de 60 **0.5pt**

EXERCICE 2 : 5pts.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I. On donne l'équation complexe (F): $z^3 - z^2 + (i-1)z - 2 - 2i = 0$
1) Démontrer que (F) admet une solution réelle et une solution imaginaire pure **0.5pt**
2) Déterminer les racines carrées de $-3 - 4i$ **0.5pt**
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) **0.5pt**
4) Montrer que les points $R(-i), S(i-1)$ et $T(2)$ forment un triangle rectangle isocèle **0.5pt**
5) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe h de centre S qui transforme R en T. **0.5pt**

II. Les nombres complexes non nuls et deux à deux distincts a, b et c sont tels que $|a| = |b| = |c|$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives a, b et c. Le point D a pour affixe $a + b + c$.
1) Montrer que $\overline{b}c - b\overline{c}$, $(b + c)(\overline{b} - \overline{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont des nombres complexes imaginaires purs. **1.5pt**
2) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux. **0.5pt**
3) Justifier que D est l'orthocentre du triangle ABC. **0.5pt**

PROBLÈME : 10pts

La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$ pour $x > 0$. (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé ayant pour unité [illegible]

<u>Partie A</u> : 3.5pts

La fonction h est définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = x + 1 + lnx$

1. Dresser le tableau de variations de h et calculer $\int_1^e h(x)dx$. **1.5pt**
2. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution β telle que : $0.27 < \beta < 0.28$ **1pt**
3. Etudier le signe de $h(x)$ **0.5pt**
4. Montrer que $h(\beta) = -\beta$ **0.5pt**

<u>Partie B</u> : 3.5pts

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **1pt**
2. Pour tout réel $x > 0$, montrer que : $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ **0.5pt**
3. Etudier les variations de f. **1pt**
4. Etudier les branches infinies de (C) **0.5pt**
5. Construire (C). **0.5pt**

<u>Partie C</u> : 3pts

La fonction g est définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

1. Démontrer que :
   a) Les équations $f(x) = 1$ et $g(x) = x$ sont équivalentes. **0.25pt**
   b) L'équation $f(x) = 1$ admet une seule solution α dans $I = [3; 4]$ **0.5pt**
   c) Pour tout $x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ **0.5pt**
2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) Montrer pour tout entier naturel n que $u_n \in I$ **0.5pt**
   b) Démontrer pour tout entier naturel n que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. **0.5pt**
   c) En déduire pour tout entier naturel n que : $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$. **0.25pt**
   d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer les valeurs de n pour lesquelles u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près **0.5pt**