COLLÈGE DE LA RETRAITE
2nd CYCLE SCIENTIFIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE SCOLAIRE 2019-2020
DURÉE : 4H COEF. : 5
CLASSE :Tle C

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

1ère Mini session

Exercice 1 : 5pts

Les trois questions sont indépendantes.

1- Les quatre nombres xy, yz, zx et xyz sont écrits en base 10.

Résoudre dans $\mathbb{N}^3$: $xy + yz + zx = xyz$. **2pts**

2- Soient a et b deux entiers relatifs.

Montrer que 3 divise $n = ab(a^2 - b^2)$. **2pts**

3- Déterminer le reste de la division par 7 de 247^{349}. **1pt**

Exercice 2 : 5pts

Les deux questions I et II sont indépendantes.

I) Pour tout entier naturel non nul n, on donne $A_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$

1- Calculer A_2 et A_3. **0,5pt**

2- Montrer que $A_n = 2n^4 - n^2$. **1pt**

3- Déterminer l'entier n tel que $A_n = 29\,161$. **1pt**

II) Soit α un réel tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Pour tout entier naturel n on a $U_0 = 2cos\alpha$ et

$U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$.

1- a) Montrer que $1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha$. **0,5pt**

b) Calculer U_1 et U_2. **0,5pt**

2- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

a) $U_n < 2$. **0,75pt**

b) $U_n = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ **0,75pt**

PROBLEBME: **10points**

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A : [illegible] points

La suite (V_n) est définie par son premier terme V_0 et $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n + 2$.

1- Etudier le cas $V_0 = 3$. **0,5pt**

2- On suppose que $V_0 \neq 3$. Pour tout réel β, on définit la suite (W_n) par $W_n = V_n + \beta$

a) Montrer qu'il existe une valeur de β pour laquelle (W_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. **0,5pt**

b) On choisit $\beta = -3$. Exprimer W_n puis V_n en fonction de n et de V_0. **1pt**

c) En déduire que (V_n) est convergente et calculer sa limite. **1pt**

d) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ puis la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$. **1pt**

Partie B : 3 points

La suite (R_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $R_n = \frac{n!}{n^n}$.

1- a) Calculer R_1 et R_3. **0,5pt**

b) Etudier le sens de variation de (R_n). **0,5pt**

c) En déduire que (R_n) est convergente. **0,25pt**

2- a) Soit un réel $x \geq 0$ et un entier naturel non nul n.

Démontrer par récurrence que $(1+x)^n \geq 1 + nx$ **0,5pt**

b) Montrer que $\frac{R_n}{R_{n+1}} \geq 2$. **0,5pt**

c) En déduire que $R_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. **0,5pt**

3- Quelle est la limite de la suite (R_n)? **0,25pt**

Partie C : 3 points

Les suites (x_n) et (y_n) sont définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1$ et $y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2$. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points $M_n(x_n, y_n)$ et la droite (Δ): $2x - y - 5 = 0$.

1-a) Pour tout entier naturel n, montrer que : $M_n \in (\Delta)$. **0,5pt**

b) En déduire que $x_{n+1} = 2x_n - 1$. **0,25pt**

c) Montrer que $x_n = 1 + 2^{n+1}$ et en déduire y_n en fonction de n. **0,75pt**

2- a) Donner un point $A(x_A, y_A)$ de la droite (Δ) tel que : $x_A \in \mathbb{Z}$ et $y_A \in \mathbb{Z}$. **0,25pt**

b) En déduire une représentation paramétrique de (Δ). **0,5pt**

3- a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $2x - y = 5$. **0,5pt**

b) En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{N}^2$. **0,25pt**