

L'épreuve comporte quatre exercices répartis sur deux pages. Présentation très appréciée.

Exercice 1 : 4points

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2pts

2. a)- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

2pts

b)- En déduire la somme $S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 199^3$

1 pt

Exercice 2 : 6points

On considère le polynôme complexe définie par $p(z) = z^3 + (-3+5i)z^2 - (3+14i)z + 19+17i$.

1. a) Calculer $p(2+i)$.

1pt

- b) Déterminer deux complexes a et b tels que $p(z) = (z-2-i)(z^2+az+b)$.

1pt

- c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

1pt

2. On munit le plan complexe du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points d'affixes respectives $a = 2+i$, $b = 2-3i$ et $c = -1-3i$

- a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

1pt

- b) Calculer le rapport $\frac{b-a}{b-c}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

1pt

- c) Déterminer l'affixe du point I centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

0.5pt

- d) Déterminer l'affixe du point D tel que B soit le centre de gravité du triangle ACD.

0.5pt

Exercice 3: 4points

Soit M un point d'affixe z . on donne le nombre complexe $U = \frac{z+2-i}{z+i}$.

- 1- Ecrire U sous forme algébrique.

(2pts)

- 2- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour que :

- a) U soit réel

(1pt)

- b) U soit imaginaire pur.

(1pt)

Exercice 4 : 6 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système
$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 4x - y - z = 5 \\ -3x + y + z = 6 \end{cases} .$$
 1,5pt

2. Des élèves des classes de Terminale D de trois établissements A, B et C de la région du Centre concourent pour un prix de SVT. Chaque établissement a envoyé ses représentants de sorte que :

- Si l'on retire un représentant de l'établissement A de la compétition, les autres représentants de A représentent alors 20% du nombre total initial de compétiteurs.
- Si l'on fait appel à deux nouveaux représentants de l'établissement A, ils représentent alors 25% du nouveau total des compétiteurs.
- ou bien si l'on retire quatre représentants de l'établissement C de la compétition, les autres représentants alors la moitié du nouveau total des compétiteurs.

Déterminer le nombre d'élèves envoyés par chaque établissement à cette compétition 2,5 pts

3. On considère dans $\mathbb{R}^4$ le système linéaire trivial d'inconnue (x, y, z, t) :

$$(S): \begin{cases} 2x + 2y - 2z + t = 4 \\ 3x + 3y - 2z + 3t = 12 \\ 4x + 3y - 4z + 4t = 16 \\ 4x + 5y - 5z + 5t = 20 \end{cases} . \text{ On pose } u = x + y - z + t .$$

a) Montrer que le système (S) est équivalent au système $(S') : \begin{cases} 2u - t = 4 \\ 3u + z = 12 \\ 4u - y = 16 \\ 5u - x = 20 \end{cases} .$ 1pt

b) Calculer u et en déduire les solutions (x, y, z, t) de (S) dans $\mathbb{R}^4$. 1pt