**Collège Mgr F. X. VOGT** **Samedi, 21 janvier 2017**

**CONTROLE DE MATHEMATIQUES**

**Niveau : TC** **Durée : 4 h**

**Exercice 1 : 4 points**

1) On considère les fonctions f et g définies sur $]-\pi;\ \pi[$ par $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$ et $g(x)=\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$.

a) Montrer que pout tout réel x de $]-\pi;\ \pi[$ , $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ et $g(x)=1-\cos x$. **0.5pt**

b) En déduire une primitive F de f et une primitive G de g sur $]-\pi;\ \pi[$. **0.75pt**

c) En déduire une primitive H de la fonction $x\mapsto\frac{1+\sin^2 x}{1+\cos x}$ sur $]-\pi;\ \pi[$. **0.5pt**

2) Linéariser $\sin^3 x\cos^2 2x$, puis déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la foncton $x\mapsto\sin^3 x\cos^2 2x$. **1.25pt**

3) Déterminer une primitive sur $]1;+\infty[$ de la foncton $x\mapsto\frac{2}{x^2-1}$. **1pt**

**Exercice 2 : 5 points**

1) Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i$, $1+\sqrt{3}+i$, $1+\sqrt{3}-i$ et $1-2i$.

a) Montrer que $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=i\sqrt{3}$, puis donner la nature du triangle ABD. **0.75pt**

b) Prouver que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. **0.75pt**

2) On considère l'équation d'inconnue complexe z, (E) : $z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$, $\theta$ étant un nombre réel.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0.75pt**

b) Montrer que les points ayant pour affixes les solutions de (E) appartiennent à (C). **0.5pt**

3) On considère l'équation d'inconnue complexe z, (E') : $z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0$.

a) Montrer que si z est une solution de (E'), alors $\bar{z}$ est une solution de (E'). **0.25pt**

b) Montrer que l'équation (E') est équivalente au système $\begin{cases} Z=z+\frac{1}{z} \\ Z^2-5Z+4=0 \end{cases}$. **0.75pt**

c) Résoudre alors (E') dans $\mathbb{C}$. **1.25pt**

**Problème : 11 points**

***Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.***

**Partie A :** On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ et ( C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 4 cm.

1) Justifier que f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$, déterminer sa dérivée f ' et donner le sens de variation de la fonction f. **1pt**

2) a) Pour tout $x>0$, calculer $\int_1^x\frac{\ln t}{t^2}dt$ à l'aide d'une intégration par parties. **0.75pt**

b) Démontrer que pour tout $t>1$, $\frac{\ln t}{2t^2}\le\frac{\ln t}{1+t^2}\le\frac{\ln t}{t^2}$. **0.25pt**

c) En déduire que pour tout $x>1$, $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)\le f(x)\le 1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$. **0.5pt**

d) En admettant que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, donner un encadrement de $l$. **0.5pt**

3) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Démontrer que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que la fonction g est la fonction nulle. **0.75pt**

b) En déduire la limite de f en zéro. **0.25pt**

c) En prenant $l = 0{,}75$ construire la courbe de la fonction f. **1pt**

4) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$. Montrer que la fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa dérivée h '. **1pt**

**Partie B :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx$.

1) a) Démontrer que $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{1+n}$. **0.5pt**

b) En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et déterminer sa limite. **0.5pt**

c) Après avoir déterminé les réels a, b et c tels que pour tout x de [0 ; 1], $\frac{x^2}{1+x} = ax + b + \frac{c}{1+x}$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$. **1pt**

d) Calculer $U_1$ à l'aide d'une intégration par parties. **0.5pt**

2) Pour tout x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n$.

a) Démontrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$. **0.5pt**

b) Démontrer que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{1+n} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$. **0.5pt**

c) Démontrer que $U_n = \frac{\ln 2}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1+n}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{1+n}\right)\right]$. **0.5pt**

d) En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 x^2 \ln(1+x)\, dx$. **0.5pt**

e) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{1+n}\right)$. **0.5pt**