Collège François Xavier Vogt | **Année scolaire 2016/2017**
Département de mathématiques | **Mini-session du 6/02/2017**
Classe: TC ; Durée:4h

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE I : (5 Points)

Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- Montrer que f est continue en 0. (0.5pt)

2- Démontrer que, pour tout x positif, on a l'encadrement : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ (1.5pt)

3- Montrer que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$ (0.5pt)

4- Préciser la position de la courbe (C) représentative de f par rapport à sa demi-tangente à l'origine. (0.5pt)

5- 5.1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et que, pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $u(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$. (1pt)

5.2. A l'aide des variations de u, déterminer le signe de u, puis le sens de variation de f sur IR_+^*. (1pt)

6- Déterminer la limite de f en $+\infty$, et représenter la courbe (C). (1.5pt)

EXERCICE II :(4 Points)

A/Soit le polynôme complexe P défini par : $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = \frac{z^4}{1+cos\theta} - 2z^2cos\theta + 4izsin\theta cos\theta + 4sin^2\theta \quad \text{où } \theta \in]-\pi;\pi[$$

1- Établir que si z_0 est racine de P, il en est de même de $-\bar{z}_0$ (0.5pt)

2- Démontrer que P a une racine de la forme $k(1+i)$ où k est un réel à déterminer. (0.5pt)

3- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (1pt)

4- Soit M_1, M_2, M_3 et M_4 les images dans le plan des nombres complexes solutions de l'équation $P(z) = 0$. Déterminer les ensembles décrits par ces différents points lorsque θ décrit $]-\pi;\pi[$. (1pt)

B/ A tout nombre complexe $Z = \frac{z+3-2i}{z-2+i}$

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel strictement positif. (1pt)

PROBLEME : (9 Points)

PARTIE A : (6 pts)

1- Pour tout nombre réel k positif, on considère la famille de fonctions f_k définie par :

$f_k(x) = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x}$

1.1. Montrer que pour tout k positif, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle $(E): 2y' = (y-x)^2 + 1$ **1pt**

1.2. En déduire le sens de variation de f_k sur $\mathbb{R}$. **0.5pt**

2. (C_k) est la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Déterminer le réel k associé à la courbe (C) passant par le point O, puis celui associé à la courbe (C') passant par le point $A(1;1)$. **0.5pt**

3- Montrer que pour tout k positif, $f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1+ke^x}$ (1) ou $f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x}$ (2)

En déduire pour tout réel k strictement positif, la position de la courbe (C_k) par rapport aux droites $(D): y = x - 1$ et $(D'): y = x + 1$ **1.5pt**

4- On suppose $k = 1$

4.1. Montrer que f_1 est impaire **0.5pt**

4.2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f_1(t)dt$

4.2.1. Donner une interprétation graphique de $F(x)$ si $x > 0$, puis si $x < 0$ **0.5pt**

4.2.2. Déduire à l'aide d'une interprétation graphique la parité de F. **0.5pt**

4.3. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$. **0.5pt**

4.4. En utilisant l'égalité (2), calculer explicitement $F(x)$. **0.5pt**

PARTIE B : (3pts)

Une société de transport opérant entre Douala et Yaoundé possède 3 autobus A, B et C. On a estimé que la probabilité pour que l'autobus A tombe en panne au cours d'un voyage est de 0,05 ; la probabilité pour que l'autobus B tombe en panne au cours d'un voyage est de 0,1 et la probabilité pour que le véhicule C tombe en panne au cours d'un voyage est de 0,25.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'autobus en bon état au cours d'un voyage.

1- Montrer que la probabilité pour qu'un seul autobus soit en bon état au cours d'un voyage est de 0,03875. **0.5pt**
2- Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X. **1.5pt**
3- Calculer l'espérance mathématique et la variance de cette variable aléatoire. **1pt**