

MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA		
DRL-DDSM	EXAMEN	BACCALAUREAT	Durée : 4h Série : C
COEFF. 5	EPREUVE	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI

EXERCICE 1 : 3,75 points

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - (-\sin x)^n \cos x}{1 + \sin x} dx$.

1. Déterminer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$. **0,25pt**

2. Montrer que $U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)^n \cos x dx$, puis calculer $U_{n+1} - U_n$. **0,75pt**

3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. **0,75pt**

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |U_n - \ln 2| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cos x dx$. **0,5pt**

5. En déduire la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite. **0,5pt**

6. On pose $a_n = (2n + 2)(U_{n+1} - U_n)$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{U_{n+1} - U_n}$.

Montrer que la suite (a_n) est géométrique et que la suite (b_n) est arithmétique. **1pt**

EXERCICE 2 : 3,25 points

Une urne contient 18 boules indiscernables au toucher parmi lesquelles : 4 boules portent le nombre $\frac{4}{5}$, 3 boules portent le nombre $\frac{1}{5}$, 6 boules portent le chiffre 1 et 5 boules portent le chiffre 2. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On nomme a le nombre porté par l'une des boules tirées et par b le nombre porté par l'autre boule tirée (avec $a > b$)

1. On définit pour tout entier naturel n deux suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$U_{n+1} = aU_n + b \text{ et } V_n = U_n - 1.$$

Calculer la probabilité p_1 pour que la suite (V_n) soit géométrique. **0,75pt**

2. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - ay' + by = 0$.

Quelle est la probabilité p_2 pour que la fonction $g : x \mapsto (Ax + B)e^x$ soit solution de (E) ? **1pt**

3. On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation $(E_0) : ax + by = 1$.

Quelle est la probabilité p_3 pour que (E_0) n'admette pas de solutions ? **0,75pt**

4. On définit dans l'espace vectoriel \mathcal{E} l'endomorphisme f dont la matrice dans la base

$$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}) \text{ est } M = \begin{pmatrix} a - 3b & 2b \\ 2b & a \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité p_4 pour que f soit une projection vectorielle ? **0,75pt**

EXERCICE 3 : 2,5 points

A) On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que $AC = BD$ et $AD = BC$. Soit I le milieu de

$[AB]$ et J celui de $[CD]$.

1. Montrer que $AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2}CD^2$ et que $BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}CD^2$. **0,5pt**

2. En déduire que les droites (IJ) et (AB) sont orthogonales. **0,5pt**

B) Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{S} des points M de l'espace tels que :

$$\|3\vec{MA} + \vec{MC}\| = 2 \|\vec{MA} + \vec{MB}\| \quad \mathbf{0,5pt}$$

2. On donne les points $A(3; -2; 1)$, $B(2; 2; 1)$ et \mathcal{D} la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; -3; 1)$.

(a) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur la droite \mathcal{D} . **0,75pt**

(b) En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur \mathcal{D} . **0,25pt**

PROBLEME : 10,5 points

A) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui, à tout point $M(x, y, z)$, associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 11) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 8) \\ z' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 5) \end{cases}$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (Δ) de repère (A, \vec{u}) où $A(1, 3, 0)$ et $\vec{u}(1, -2, 1)$. **0,5pt**

2. Soit I le milieu de $[MM']$.

(a) Démontrer que $I \in (\Delta)$ et que les vecteurs \vec{MI} et \vec{u} sont orthogonaux. **0,5pt**

(b) En déduire la nature et les éléments géométriques de f . **0,5pt**

3. Soit (P) le plan d'équation $x + y + z - 4 = 0$. On désigne par S_1 la réflexion de plan (P) .

(a) Donner l'expression analytique de S_1 . **0,75pt**

(b) Déterminer l'application S_2 de l'espace telle que $f = S_1 \circ S_2$. **0,5pt**

4. Soit M et N deux points de l'espace. On considère dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'endomorphisme φ associé à l'application linéaire f telle que $\varphi(\vec{MN}) = \vec{f(M)} \vec{f(N)}$.

(a) Ecrire la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. **0,5pt**

(b) Montrer que φ est un automorphisme. **0,5pt**

(c) Démontrer que φ est une symétrie vectorielle. **0,5pt**

B) On considère les fonctions g et h définies sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -2 \ln x - xe + 1$ et

$h(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$ où e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$. On note (Γ) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , unité graphique : 2cm.

1. Etudier les variations de g . **0,5pt**
2. (a) Montrer que dans $[0,5;1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α . **0,5pt**
 (b) Déterminer un encadrement de α à $0,1$ près. **0,25pt**
 (c) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x . **0,5pt**
3. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition. **0,5pt**
4. Soit h' la fonction dérivée de h .
 (a) Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis que $h(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$. **0,5pt**
 (b) Dresser le tableau de variation de h . **0,25pt**
 (c) Construire la courbe (Γ) . **0,75pt**

C)

$ABCD$ est un carré direct de centre O et d'arête \sqrt{a} avec $a > 0$. Soit f la similitude directe qui transforme A en B et B en A . Soit S le point de l'espace tel que : $\overrightarrow{OS} = \frac{\sqrt{3}}{2a} (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$.

1. Déterminer la nature exacte de f , puis caractériser f . **0,5pt**
2. (a) Exprimer le milieu I de $[SD]$ comme barycentre des points A, B, C et S . **0,5pt**
 (b) Le triangle ACS est-il équilatéral ? Justifier. **0,5pt**
 (c) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de a . **0,5pt**
3. Donner la nature de la composée $S_{(ABC)} \circ S_{(ACS)}$. **0,5pt**

www.doualamaths.net

TNAM210418

www.doualamaths.net