TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES

<u>NB</u> : ***La clarté de la copie et la précision dans la rédaction seront prises en compte.***

Exercice 1

1. Construis un carré $ABCD$ de centre I inscriptible dans un cercle (C) et tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.
2. Calculer en fonction de AB l'aire du disque délimité par (C).
3. Soit s la similitude de centre B qui transforme A en D. Soit D' et I' les images respectives de D et I par s.
   (a) Préciser les éléments géométriques de s
   (b) Prouver que $I' = C$ et en déduire que C est le milieu de $[BD']$.
   (c) Soit (C') l'image de (C) par s. Évaluer l'aire du disque délimité par (C').
4. On suppose le plan rapporté à un repère orthonormal dans lequel $B(1,1)$.
   (a) Donner une écriture complexe de s
   (b) Si $M(x, y)$ on note $M'(x', y')$ son image par s. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère le vecteur $\overrightarrow{u}(-2,3)$.

1. Préciser la nature des transformations $f = S_{(OI)} \circ t_{\overrightarrow{u}}$ et $g = S_{(OI)} \circ t_{\overrightarrow{OJ}}$.
2. Donner les éléments caractéristiques de g.
3. Donner les expressions analytiques de $t_{\overrightarrow{u}}$, S_{OI}, f et fof.
4. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne les points $A(1,1)$, $B(-3,3)$, $C(2,2)$ et $D(-4,4)$. E et F désignent les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

1. Démontrer qu'il existe une unique rotation qui transforme A en B et C en D. Déterminer son angle et son centre.

2. Démontrer qu'il existe une unique rotation r' qui transforme A en D et C en B. Déterminer son angle et son centre.
3. Que peut-on dire du quadrilatère $IEJF$?

Exercice 4

Le plan affine euclidien est orienté. La figure de référence est un triangle équilatéral direct sur lequel on a $AB = BC = AC = 1$ et une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\frac{\pi}{3}$. On reproduira et complètera la figure au fur et à mesure de l'avancée de l'exercice. On désigne par O le milieu du segment $[BC]$ et G l'isobarycentre des points A, B et C.

1. Construire G et calculer la distance GO.
2. Déterminer la nature de l'ensemble (S) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1.25$. Tracer (S) sur la figure précédente.
3. Dans la suite, r désigne la rotation de centre G qui transforme C en A et h l'application du plan qui, à tout point M du plan, associe le le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. On pose $s = h \circ r$.
   (a) Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   (b) Déterminer puis tracer sur la même figure que précédemment l'image de (S) par h.
   (c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s.
4. On note I le symétrique de O par rapport à C, J le point de la droite (OA) tel que $OJ = 1$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OJ}$.
   (a) Démontrer que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.
   (b) M étant un point d'affixe z et M' son image par s, exprimer l'affixe z' de M' en fonction de z.
   (c) En déduire l'expression analytique de s dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que la matrice dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ de l'endomorphisme σ associé à s dans le plan vectoriel.

On n'apprend pas à un poisson à grimper un arbre. A. Einstein