

MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
21.11.2017	EXAMEN	SEQUENCE N° 2	Durée : 4h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	EPREUVE	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : 4 points

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique $1cm$.
On considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$ et C tel que $ABCD$ soit un rectangle. On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

- Déterminer l'afixe z_E de E , image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. **0,5pt**
- Déterminer les réels a, b tels que $F = \text{bar} \{(A, a), (B, b), (C, 1)\}$ et $z_F = 6 - i$. **0,5pt**
- On considère la similitude directe S qui transforme A en E et B en F . A tout point M d'afixe z , on associe le point M' d'afixe z' , image de M par S .
 - Montrer que $z' = (1 + i)z + 4 - 3i$. **0,5pt**
 - Déterminer le centre I , l'angle θ et le rapport k de la similitude S . **0,75pt**
 - Déterminer $S(C)$ et $S(D)$. **0,5pt**
 - Calculer l'aire de l'image par S du rectangle $ABCD$. **0,25pt**
- Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9$. **0,5pt**
- Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Γ par S . **0,5pt**

EXERCICE 2 : 3,5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points : $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -6; -1)$, $C(2; 2; 2)$, $I(0; 1; -1)$, $J(-2; 0; 0)$ et $K(1; 0; 1)$.

- Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. **0,5pt**
- Déterminer une équation cartésienne du plan (P) contenant les points A, B, C . **0,5pt**
- Soit (Q) le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$ et (Q_0) le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$.
 - Pourquoi (Q) et (Q_0) sont-ils sécants ? **0,5pt**
 - Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $(\Delta) = (Q) \cap (Q_0)$ **0,5pt**
- Ecrire une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de centre I et de rayon 2. **0,5pt**
- Déterminer avec soin l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite (JK) . **1pt**

EXERCICE 3 : 2,5 points

- Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3[7]$, dont l'inconnue $x \in \mathbb{Z}$, n'a pas de solution. **0,5pt**
 - Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et b . **0,75pt**
- L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 - Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + \sqrt{3}y - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles et donner une représentation paramétrique de $\Delta = P \cap Q$. **0,75pt**
 - Soit Γ le cône de révolution d'équation $y^2 + z^2 = 7x^2$. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.
Montrer que si $A(a, b, c) \in \Gamma$, alors a, b et c sont divisibles par 7. **0,5pt**

PROBLEME : 10 points**PARTIE A : 2,5 points**

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z .

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. **0,5pt**
 (b) Ecrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle. **0,5pt**
2. On désigne par a le nombre complexe de module 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.
 (a) Calculer a^2 sous forme algébrique. **0,25pt**
 (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. **0,5pt**
3. (a) Démontrer que si z est solution de (E), alors $\bar{z}$ l'est aussi. **0,25pt**
 (b) En déduire dans $\mathbb{C}$ toutes les solutions de l'équation (E). **0,5pt**

PARTIE B : 3 points

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans (P) et (π) d'équations cartésiennes respectives : $10x + 15y + 6z = 73$ et $z = 3$.

1. Soit $M(x, y, z) \in (P) \cap (\pi)$. On suppose que x, y et z appartiennent à $\mathbb{Z}$.
 (a) Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation $(E) : 2x + 3y = 11$. **0,25pt**
 (b) Vérifier que le couple $(7, -1)$ est solution de (E) , puis résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$. **0,75pt**
 (c) Déterminer tous les points M dont les coordonnées sont des entiers naturels. **0,5pt**
2. Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.
 (a) Montrer que y est impair. **0,5pt**
 (b) Montrer que $x \equiv 1[3]$. **0,25pt**
 (c) On pose alors $x = 1 + 3p, y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$ où $p, q, r \in \mathbb{N}$.
 Montrer que $M(x, y, z) \in (P)$ si et seulement si $p + q + r = 1$. **0,25pt**
 (d) Déterminer tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels. **0,5pt**

PARTIE C : 4,5 points

C1) Soit la fonction f définie sur $I =]-1; 1[$ par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Etudier les variations de f . **0,5pt**
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$. **0,5pt**
 (b) Vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$ et que $\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$. **0,5pt**
 (c) Donner le signe de $f(x) - x$ sur I . **0,5pt**
3. (a) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. **0,5pt**
 (b) Tracer les courbes Γ et Γ^{-1} respectivement de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2cm) **0,5pt**

C2) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $g(x) = \tan \frac{x}{2}$.

1. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $g^{-1}(1)$. **0,75pt**
2. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+, (g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$. **0,75pt**